НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра диференціальних рівнянь

«На правах рукопису»
УДК 517.9

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
__________ М. Є. Дудкін
“___”_____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Матриці типу Якобі у сильній двовимірній проблемі моментів»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Хлудкова Тетяна Олегівна _______________

Керівник
проф., д. ф. -м. н. Дудкін М.Є. _______________

Рецензент:
доц., д. ф. -м. н. О. Ю. Дюженкова _______________

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка _____________

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра диференціальних рівнянь

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ М. Є. Дудкін
«___»_____________2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Хлудковій Тетяні Олегівні

1. Тема дисертації «Матриці типу Якобі у сильній двовимірній проблемі моментів»,

науковий керівник дисертації Дудкін Микола Євгенович, доктор фізико-математичних наук, професор,

затверджені наказом по університету від «23» березня 2018 р. No 1016-с.

2. Термін подання студентом дисертації 4 травня 2018 р.

3. Об’єкт дослідження матриці типу Якобі.

4. Предмет дослідження комутативність матриць відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) вивести теорему про розпад міри у добуток мір

2) довести теорему;

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 15 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) Т. О. Хлудкова. Матриці типу Якобі відповідні сильній двовимірній системі моментів // VII всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. - 19-20 квітня, 2018. - Київ. - с. 22.

8. Дата видачі завдання 5 лютого 2018 р. Календарний план

No з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.2018-15.02.2018	виконано
2.	Реферативний виклад відомих результатів	16.02.2018-04.03.2018	виконано
3.	Доведення теореми про розпад міри у добуток мір	05.03.2018-18.03.2018	виконано
4.	Розгляд прикладів	19.03.2018-03.04.2018	виконано
5.	Оформлення роботи	04.04.2018-03.05.2018	виконано

Студент Хлудкова Т. О.

Науковий керівник дисертації Дудкін М. Є.

Реферат

Магістерська дисертація: 68 сторінок, 14 слайдів для проектора, 74 першоджерел.

Вивчаються матриці Якобі у сильній двовимірній проблемі моментів.

Мета роботи полягає в тому, щоб розвинути відомі результати стосовних проблеми моментів Гамбургера у випадку двовимірної сильної проблеми моментів, побудова відповідних матриць Якобі.

Завданням роботи є отримання результатів стосовних проблеми моментів Гамбургера у випадку двовимірної сильної проблеми моментів, розгляд конкретних прикладів. Предметом дослідження є комутативність матриць відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів.

Для отримання вказаних результатів розглянено несильну проблему моментів, використано складні поняття матриць Якобі у сильній двовимірній проблемі моментів, розглянено пряму й обернену спектральні задачі для мір і відповідних матриць.

Ключові слова: матриці Якобі, проблема моментів, сильна проблема моментів, блочна структура, спектральна задача.

Abstract

Master degree thesis contains 68 pages, 14 slides for projector, and 74 primary sources.

Jacobi matrices realted to strong two dimensional moment problem are studied.

The purpose of the work is to develop well-known results concerning the problems of Hamburger moments in the case of a two-dimensional problem of moments, the construction of the corresponding Jacobi matrices, the consideration of concrete examples.

The task of the work is to obtain the results of the related problem of Hamburger moments in the case of a two-dimensional strong problem of moments, the consideration of concrete examples. The subject of the study is the commutativity of the matrices corresponding to the strong two-dimensional real problem of moments.

For the given results a nonessential problem of moments is considered, the complex notions of Jacobi matrices in the strong two-dimensional problem of moments are used, and the direct and inverse spectral problems for the measures and the corresponding matrices are considered.

Keywords: Jacobi matrices, problem of moments, strong moments problem, block structure, spectral problem.

ЗМІСТ

ВСТУП

Матриці Якобі у зв'язку із проблемою моментів розглядали Н. І. Ахієзер, Г. Вейль, М. Г. Крейн, М. Ріс, Р. Неванлінна та багато інших. Дані матриці виникають у багатьох математичних та фізичних задачах. Наприклад в алгебраінчних - дослідження неперервних дробів, у математичному аналізі - при апроксимації Паде, чи у механічних задачах - при розгляді моделей та зв'язних маятників.

Плідним підходом до вивчення властивостей матриць Якобі є теорія розкладу за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів Ю. М. Березанського. Одним із наслідників цієї теорії є пряма й обернена спектральні задачі для мір і відповідних матриць. Пряма задача полягає у розв'язанні системи різнецевих рівнянь за заданою матрицею Якобі та отриманні поліномів ортогональних відносно борелівської міри, а отже, і отиманні міри (у такому розумінні). Обернена задача полягає у побудові матриць Якобі та відповідних поліномів за заданою борелівською мірою.

У цій роботі ми розглянемо деякі результати щодо двовимірної задачі реального моменту. Форма рішення необхідна для розуміння другої частини.

Друга частина статті (розділи 2, 3) являє собою подання прямих та зворотних спектральних задач, що є узагальненням аналогічних класичних задач для матриць Якобі та ортогональних многочленів на дійсній осі R у випадку двох блоків типу Якобі, що також симетричні матрицям та відповідним ортогональним многочленам на комплексній площині R^2.

Вивчення n - мірної задачі реального моменту можна знайти в багатьох роботах, зазначимо тут наступні [2, 3, 4, 7].

Блочні матриці типу Якобі, відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, вперше з'явились у роботах М. І. Гехтмана та А. А. Калюжного.

Майже одночасноу численних роботах Ян Ху розглядаються абстрактні матриці (без з'ясування їх внетрішньої структури), відповідні багатовимірним проблемам моментів.

Встановлення та вивчення матриць, відповідних сильній двовимірній дійсній степеневій проблемі моментів та комплексній проблемі моментів разом із формулюванням та розв'язанням прямої та оберненої спектральних задач, записом ортонормованих поліномів у просторах з мірою, відповідною таким матрицям, дозволить розв'язувати нові прикладні задачі.

РОЗДІЛ І. СИЛЬНА ДВОВИМІРНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

В цьому розділі для повноти досліджень наведено детальний розв'язок степеневої двовимірної проблеми моментів та двовивірної сильної проблеми моментів. Розв'язки записані за допомогою рівності Парсеваля, використовуючи розклад за відповідними узагальненими власними векторами. Отже, далі слідуємо згідно роботи [51].

1.1. Попередні відомості до не сильної проблеми моментів

Ця проблема полягає у знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in N_0$, для яких існує міра Бореля $dp(x, y)$ на дійсній площині R^2 і для якої:

$$s_{m,n} = \int_{R^2} x^m y^n \, dp(x, y), \; m, n \in N_0$$

Класична теорія досліджувала матрицю Ермітова Якобі

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n > 0, \qquad \begin{aligned} n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \end{aligned}$$

визначеної як оператор на площині l_2 послідовностей $f = f(f_n)_{n=0}^{\infty}$. Ця матриця генерує оператор J на скінченній послідовності $f \in l_{fin} \subset l_2$, яка є Ермітовою. За певних умов на J (наприклад $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-1}^{n} = \infty$) замикання J (позначимо його також J) є самоспряженим. Для спрощення, будемо говорити, що J є самоспряженим. Пряма спектральна задача, тобто розширення власних функцій для J, будується наступним чином. Ми отримуємо послідовність многочленів $P(\lambda = (P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}$, $\forall \lambda \in R$ як рішення рівняння $JP(\lambda) = \lambda P(\lambda)$.

1.2. Попередні відомості до сильної проблеми моментів

Нехай $\mathfrak{H}$– сепарабельний гільбертів простір, і нехай A та B – комутуючі самоспряжені оператори, визначені на $Dom(A)$ і $Dom(B)$ в $\mathfrak{H}$ і A^{-1} та B^{-1} – їх відповідні обернені оператори. Розглянемо оснащення $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}_- \supset \mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_+ \supset \mathscr{D}, \tag{1.1}$$

де $\mathfrak{H}_+$ – гільбертів простір топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}_-$ є дуальним до $\mathfrak{H}_+$ відносно простору $\mathfrak{H}$; $\mathscr{D}$ – лінійний топологічний простір, топологічно вкладений в $\mathfrak{H}_+$.

Оператори A і B та A^{-1} і B^{-1} називаються стандартно пов'язаними з (1.1), якщо $\mathscr{D} \supset Dom(A)$, $\mathscr{D} \subset Dom(B)$, $\mathscr{D} \supset Dom(A^{-1})$, $\mathscr{D} \supset Dom(B^{-1})$ і звуження $A \upharpoonright \mathscr{D}$, $B \upharpoonright \mathscr{D}$, $A^{-1} \upharpoonright \mathscr{D}$, $B^{-1} \upharpoonright \mathscr{D}$ діють з $\mathscr{D}$ в H_+ неперервно.

Нагадаємо, що вектор $\Omega \in \mathscr{D}$ називаться сильним циклічним вектором для операторів A та B, якщо для деяких $p, q \in N$ ми маємо $\Omega \in Dom(A_p) \cap Dom(B_q)$, $A_p B_q \Omega \in \mathscr{D}$ та набір усіх цих векторів та Ω, де $p, q \in N_0$ є загальним в просторі $\mathfrak{H}_+$ (і, отже, і в $\mathfrak{H}$). Якщо припустити, що строго циклічний вектор існує, то також можна сформулювати спрощений варіант проекційної спектральної теореми. Повну версію і відповідні доведення можна знайти в (див. [8], Розділ 3, Теорема 2.7, або [4] Розділ 5, [10], Розділ 15, [64]).

Теорема 1.2.1 Для комутуючих самоспряжених операторів A і B та їх обернених A^{-1} і B^{-1} зі строго циклічним вектором в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ існує скінченна борелівська міра $dp(x, y)$, задана таким чином, що для ρ-майже кожної точки $(x,y) \in R^2$ існує узагальнений спільний власний вектор $0 \neq \xi_{x,y} \in \mathfrak{H}_-$, тобто, $\forall f \in \mathscr{D}$,

$$(\xi_{x,y},\ A f)_{\mathfrak{H}} = x\,(\xi_{x,y}\ f)_{\mathfrak{H}}, \qquad (\xi_{x,y},\ B f)_{\mathfrak{H}} = y\,(\xi_{x,y}\ f)_{\mathfrak{H}}$$

$$(\xi_{x,y},\ A^{-1} f)_{\mathfrak{H}} = x^{-1}\,(\xi_{x,y}\ f)_{\mathfrak{H}}, \quad (\xi_{x,y},\ B^{-1} f)_{\mathfrak{H}} = y^{-1}\,(\xi_{x,y}\ f)_{\mathfrak{H}}$$

$$f \in \mathscr{D},\ \xi_{x,y} = 0$$

Відповідне перетворення Фур'є F, задане за правилом

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_+ \ni f \to (F\,f)\,(x,\ y) = \widehat{f}\,(x,\ y) = (f,\ \xi_{x,y})_{\mathfrak{H}} \in L_2\,(R^2, dp\,(x,\ y)) := L_2$$

є унітарним оператором (після замикання), який діє з $\mathfrak{H}$ в L_2. Образи операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} в F є операторами множення на x і y та x^{-1} і y^{-1} відповідно в L_2.

1.3. Розв'язання двовимірної сильної степеневої проблеми моментів

Двовимірна дійсна степенева проблема моментів полягає у знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in Z$, дійсних чисел так, щоб існувала міра Бореля $dp(x, y)$ на дійсній площині R^2, для якої виконується рівність (див. [1, 2, 28]):

$$s_{m,n} = \int\limits_{R^2} x^m y^n \, dp(x, y), \qquad m, n \in Z \tag{1.4}$$

Теорема 1.3.1 Якщо для заданої двоіндексної послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in Z$ існує зображення (1.4), то послідовність є додатно визначеною, тобто

$$\sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} \, s_{j+m,k+n} \geq 0 \quad \left(\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} \, s_{j+m,k+n} \geq 0 \right) \tag{1.5}$$

для всіх фінітних послідовностей комплексних чисел

$(f_{j,k})_{j,k \in Z}$ $((f_{j,k})_{j,k=0}^{\infty})$, $f_{j,k} \in C$.

Зображення (1.4) для заданої послідовності дійсних чисел $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in Z$ $(m, n \in N_0)$ існує і єдине, якщо воно додатно визначене і розбігається один з рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{k(4p-4k),\, l(4k)}}}} = \infty \quad , \tag{1.6}$$

де пара $\{k, l\}$ має одне із значень:

$\{+1, +1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$, $\{-1, -1\}$.

Нагадаємо, що умова (1.5) є необхідною для інтегрального зображення (1.4). Умови, визначені в (1.5) і (1.6), разом гарантують не тільки існування але і єдиність представлення (1.4) для даної послідовності $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$. Єдиність є наслідком квазіаналітичного критерія самоспряженості.

Доведення. Необхідність умови (1.5) доводиться просто. Якщо послідовність $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in Z$ має зображення (1.4), то для довільної скінченної послідовності $f = (f_{m,n})_{m,n \in Z}$, $f_{m,n} \in C$ виконується:

$$\sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} \ s_{j+m,k+n} = \int_{R^2} \Big| \sum_{m,n \in Z} f_{m,n} x^m y^n \Big|^2 (dp(x, y) \geq 0) \qquad (1.7)$$

Позначимо через l лінійний простір C^{∞} послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n \in Z}$, $f_{m,n} \in C$, і через l_{fin} - його лінійну множину, що складається з скінченних послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n \in Z}$, тобто послідовностей, де $f_{m,n} \neq 0$ тільки для скінченної кількості індексів n і m. Нехай $\delta_{m,n}$, $m, n \in Z$, – це δ - послідовність, визначена таким чином, що кожен $f \in l_{fin}$ зображається так: $f = \sum_{n,m \in Z} f_{m,n} \delta_{m,n}$.

Розглянемо лінійні оператори l_{fin} :

$$(J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k} \qquad (J_B f)_{j,k} = f_{j,k-1}$$

$$(J_{A^{-1}} f)_{j,k} = f_{j+1,k} \qquad (J_{B^{-1}} f)_{j,k} = f_{j,k-1}. \qquad (1.8)$$

Оператори J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ є операторами типу “народження”. Для δ - послідовностей маємо:

$$J_A \delta_{j,k} = \delta_{j+1,k}, \ J_B \delta_{j,k} = \delta_{j,k+1}, \ J_{A^{-1}} \delta_{j,k} = \delta_{j-1,k}, \ J_{B^{-1}} \delta_{j,k} = \delta_{j,k-1} \qquad (1.9)$$

Оператори J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ – симетричні на фінітних векторах відносно (квазі) скалярного добутку

$$(f, g)_S = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} \ s_{j+m,k+n}, \ f, g \in l_{fin}$$

(1.10)

Дійсно,

$$(J_A f, g)_S = \sum_{j,k,m,n \in Z} (J_A f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} \ s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j-1,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} == \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m+1,k+n} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m-1,n}\, s_{j+m,k+n} == \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, (\overline{J_A g})_{m,n}\, s_{j+m,k+n} =$$

$$= (J_A f, g)_S \quad ,$$

$$(J_B f, g)_S = \sum_{j,k,m,n \in Z} (J_B f)_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k-1}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+n+1,k+m} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m-1,n}\, s_{j+n,k+m} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, (\overline{J_B g})_{m,n}\, s_{j+m,k+n}$$

$$= (J_B f, g)_S \quad ,$$

$$(J_{A^{-1}} f, g)_S = \sum_{j,k,m,n \in Z} (J_{A^{-1}} f)_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j+1,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m-1,k+n} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m+1,n}\, s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, (\overline{J_{A^{-1}} g})_{m,n}\, s_{j+m,k+n} =$$

$$= (J_{A^{-1}} f, g)_S \quad ,$$

$$(J_{B^{-1}} f, g)_S = \sum_{j,k,m,n \in Z} (J_{B^{-1}} f)_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k+1}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m,n}\, s_{j+n-1,k+m} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, \overline{g}_{m-1,n}\, s_{j+m,k+m} = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k}\, (\overline{J_{B^{-1}} g})_{m,n}\, s_{j+m,k+n} =$$

$$= (J_{B^{-1}} f, g)_S \quad ,$$

Оператори J_A, J_B, $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ комутують між собою на l_{fin} :

$$(J_B J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k-1} = (J_A J_B f)_{j,k} ,$$

$$(J_{B^{-1}} J_{A^{-1}} f)_{j,k} = f_{j+1,k+1} = (J_{A^{-1}} J_{B^{-1}} f)_{j,k}$$

$(J_B J_{A^{-1}} f)_{j,k} = f_{j-1,k+1} = (J_{A^{-1}} J_B f)_{j,k}$,

$(J_{B^{-1}} J_A f)_{j,k} = f_{j+1,k-1} = (J_A J_{B^{-1}} f)_{j,k}$

Нехай S – гільбертів простір, отриманий як фактор - простір

$l_{fin} = l_{fin} / \{h \in l_{fin} \mid (h, h)_S = 0\}$.

Елемент f з S відповідає елементу $f^{\bullet}$ з простору еквівалентних елементів $l^{\bullet}_{fin}$. Отже, оператори $J^{\bullet}_A$ і $J^{\bullet}_B$ та їх обернені $J^{\bullet}_{A^{-1}}$ і $J^{\bullet}_{B^{-1}}$ коректно визначені в S. Цей факт описаний детально в [4], Розділ 8, §1, п. 4 і [8], Розділ 5, §5, п. 2. Аналогічно до цього випадку отримуємо:

$J^{\bullet}_A f^{\bullet} = (J_A f)^{\bullet}$; $J^{\bullet}_B f^{\bullet} = (J_B f)^{\bullet}$; $J^{\bullet}_{A^{-1}} f^{\bullet} = (J_{A^{-1}} f)^{\bullet}$; $J^{\bullet}_{B^{-1}} f^{\bullet} = (J_{B^{-1}} f)^{\bullet}$

$$f \in Dom(J^{\bullet}_A) = Dom(J^{\bullet}_B) = Dom(J^{\bullet}_{A^{-1}}) = Dom(J^{\bullet}_{B^{-1}}) = l^{\bullet}_{fin} \qquad (1.11)$$

Позначимо для подальших досліджень A і B замикання ~ $J^{\bullet}_A$ і $J^{\bullet}_B$ в S.

Для простоти будемо вважати, що послідовність $\{s_{m,n}\}$ є невиродженою, тобто якщо $(f,f)_S = 0$ для $f \in l_{fin}$,тоді $f = 0$,і тепер $f^{\bullet} = f$ і $\tilde{J^{\bullet}_A} = A$ і $\tilde{J^{\bullet}_B} = B$ та $\tilde{J^{\bullet}_{A^{-1}}} = A$ і $\tilde{J^{\bullet}_{B^{-1}}} = B$. Дослідження в загальному випадку також є більш складним, див., наприклад, в [4], Розділ 8, §1, Підрозділ 4 і [8], Розділ 5, §5, Підрозділ 1-3.

Припустимо також, що оператори A і B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ – самоспряжені. Пізніше буде доведено, що A і B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ самоспряжені і комутуючі у строгому резольвентному сенсі за умови (1.6).

Побудуємо оснащення простору S:

$(l_2(p))_{-,S} \supset S \supset l_2(p) \supset l_{fin}$

(1.12)

де $l_2(p)$ є зваженим l_2 - простором з вагою $p = (p_{m,n})_{m,n \in Z}$, $p_{m,n} \geq 1$.

Норма в $l_2(p)$ визначається формулою: $\| f \|^2_{l_2(p)} = \sum_{m,n \in Z} |f_{m,n}|^2 p_{m,n}$,

де $(l_2(p))_{-,s} = H$ – є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p) = H_+$ і нульового простору $S = H$.

Лема 1.3.2 Для простору S існує достатньо швидко зростаюча послідовність $p_{m,n}$, така, що вкладення $l_2(p) \to S$ є квазіядерним.

Доведення. Нерівність *(1.5)* також означає, що мульти-матриця вигляду $(K_{j,k;m,n})_{j,k,m,n \in Z}$ з коефіцієнтами $K_{j,k;m,n} = s_{j+m,k+n}$ є невід'ємно визначеною і, отже,

$$|s_{j+m,k+n}|^2 = |K_{j,k;m,n}|^2 \le K_{j,k;j,k} K_{m,n;m,n} = s_{j+k,j+k}, \; s_{n+m,n+m},$$

$$j, k, m, n \in Z \qquad (1.13)$$

Нехай вага $q = (q_{j,k})_{j,k \in Z}, q_{j,k} \ge 1$, така, що

$$\sum_{j,k \in Z} s_{j+k,j+k}, q_{j,k}^{-1} < \infty .$$

Далі, з (1.13) отримуємо, що

$$\|f\|_S^2 = \sum_{j,k,m,n \in Z} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \le \Big(\sum_{j,k \in Z} \frac{s_{j+k,j+k}}{q_{j,k}} \Big) \|f\|_{l_2(q)}^2 , f \in l_{fin}$$

Таким чином, $l_2(q) \to S$ квазіядерних і топологічних вкладень є також квазіядерним.

На наступному кроці використаємо оснащення (1.12) для побудови узагальнених власних векторів. Внутрішня структура простору $(l_2(p))_{-,S}$ складна, тому що складна структура S. Це є причиною ввести нове оснащення

$$l = (l_{fin})' \supset (l_2(p^{-1})) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{fin},$$

(1.14)

де $l_2(p^{-1})$, $p^{-1} = (p_{m,n}^{-1})_{m,n \in Z}$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p)$ і нульового простору l_2. Ланцюги (1.12) і (1.14) мають один і той самий додатній простір $l_2(p)$. Лема 1.3.2 встановлює також, що простір $(l_2(p))_{-,S}$ є ізометричним до простору $l_2(p^{-1})$.

Роль оснащень у подальшому будуть виконувати (1.12) і (1.14).

Очевидно, що оператори A і B та A^{-1} і B^{-1} стандартно пов'язані із ланцюгом (1.14), і вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{fin}$ є строго циклічним для операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}, тому можемо застосувати теорему 1.2.1.

Нехай $\xi_{x,y} \in (l_2(p))_{-,S}$ є узагальненим власним вектором операторів A і B та A^{-1} і B^{-1}. Отже, в цьому випадку, за теоремою 1.2.1 маємо: $\forall f \in l_{fin}$

$$(\xi_{x,y}, Af)_S = x(\xi_{x,y}, f)_S, \qquad (\xi_{x,y}, Bf)_S = y(\xi_{x,y}, f)_S,$$

$$(\xi_{x,y}, A^{-1}f)_S = x^{-1}(\xi_{x,y}, f)_S, \qquad (\xi_{x,y}, B^{-1}f)_S = y^{-1}(\xi_{x,y}, f)_S \qquad (1.15)$$

Позначимо:

$$P(x, y) = U\xi_{x,y} \in l_2(p^{-1}) \subset l,$$

$$P(x, y) = (P_{m,n}(x, y))_{m,n \in Z}, \quad P_{m,n}(x, y) \in R^2$$

Використовуючи (1.12) і (1.14), перепишемо (1.15) у вигляді: $\forall f \in l_{fin}$

$$(P(x, y), Af)_{l_2} = x(P(x, y), f)_{l_2}$$

$$(P(x, y), Bf)_{l_2} = y(P(x, y), f)_{l_2}$$

$$(P(x, y), A^{-1}f)_{l_2} = x^{-1}(P(x, y), f)_{l_2}$$

$$(P(x, y), B^{-1}f)_{l_2} = y^{-1}(P(x, y), f)_{l_2} \qquad (1.16)$$

Відповідне перетворення Фур'є має вигляд:

$$S \supset l_{fin} \ni f \to (Ff)(x, y) = \widehat{f}(x, y) = \sum_{m,n \in Z} f_{m,n} x^m y^n \in L_2(R^2, dp(x, y)), \qquad (1.23)$$

і $$(f, g)_S = \int_{R^2} \widehat{f}(x, y)\, \overline{\widehat{g}(x, y)}\, dp(x, y), \quad f, g \in l_{fin} \qquad (1.24)$$

Для побудови перетворення Фур'є (1.17) і використання формул (1.18) - (1.24) є ще необхідним перевірити, що для наших операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{fin}$ є строго циклічним у розумінні оснащення (1.12). Але це вірно, тому що завдяки (1.9) маємо:

$$A^p B^q \Omega = J_A^p J_B^q \delta_{0,0} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in Z.$$

Рівність Парсеваля (1.24) відразу ж приводить до зображення (1.4) згідно з (1.22), (1.23): $\widehat{\delta}_{m,n} = x^m y^n$ і $\widehat{\delta}_{0,0} = 1$; з (1.10) отримаємо

$$s_{m,n} = (\delta_{m,n}, \delta_{0,0})_S = (\widehat{\delta}_{m,n}, \widehat{\delta}_{0,0})_{L_2(R^2, dp(x,y))} = \int^{R^2} x^m y^n \, dp(x, y),$$

$$m, n \in Z \qquad (1.25)$$

Однозначність зображення (1.4) випливає з самоспряженості і комутативності операторів A і B або A і B^{-1} або A^{-1} і B або A^{-1} і B^{-1} (з [4], Розділ 8). Отже, для завершення доведення теореми 1.2.1 треба тільки перевірити, що умова (1.6) забезпечує самоспряженість та комутативність A і B. Але для цього потрібно тільки перевірити, чи має, наприклад, оператор $A^2 + B^2$ щільну множину D квазіаналітичних векторів.

Завдяки (1.8), оператор $Ą = A^2 + B^2$ діє на $\delta_{m,n} \in D$ таким чином:

$$Ą\delta_{m,n} = (A^2 + B^2)\,\delta_{m,n} = \delta_{m+2,n}\,\delta_{m,n+2} \qquad (1.26)$$

Очевидно, $Ą \geq 0$. Для $p \geq 1$ маємо: $Ą^p = \delta_{m,n} = \sum_{k=0}^{p} c_p^k \delta_{m+2p-k,\, n+2k}$.

Згідно з (1.10) норма $\| f \|_S = \sqrt{(f, f)_S}$ в S. Отже, $\forall \delta_{m,n} \in D$ отримуємо

$$\| Ą^p \ \delta_{m,n} \|_S = \| \sum_{k=0}^{p} c_p^k \delta_{m+2p-k,\, n+2k} \|_S \leq \sum_{k=0}^{p} c_p^k \ \| \delta_{m+2p-k,\, n+2k} \| =$$

$$\sum_{k=0}^{p} c_p^k \sqrt{s_{2m+4p-2k,\, 2m+4p-2k}} \qquad (1.27)$$

Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\| Ą^p \ \delta_{m,n} \|}} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{\infty} c_p^k \sqrt[R]{s_{2m+4p-4k,\, 2n+4k}}}} = \infty, \quad m, n \in N_0$$

то доведено, що квазіаналітичність класу $C\{\left\| Ą^p \ \delta_{m,n} \right\|$, випливає з квазіаналітичності класу $C \left\{ \sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,\, 2n+4k}} \right\}$ через властивості квазіаналітичності з [44, 59]. Це еквівалентно квазіаналітічності класу

С $\left\{ \sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,\ 4k}} \right\}$. Але ця квазіаналітичність дає одну із умов (1.6), беручи до уваги (1.27). Інші з умов в (1.6) отримуються перебором варіантів, покладаючи в (1.26)

$$A := A^2 + (B^{-1})^2, \quad A := (A^{-1})^2 + (B)^2, \quad A := (A^{-1})^2 + (B^{-1})^2$$

□

Зауваження 1.4. Формула – умова (1.6) також є новою, але відомі інші умови типу (1.6), які гарантують єдиність міри в теоремі 1.3.1.

Зауваження 1.5. Для отримання зображення (1.4) використовуємо метод розкладу за узагальненими власними векторами Ю. М. Березанського.

Висновки: Наведено розв’язки двовимірної сильної і не сильної проблем моментів, а саме, необхідні умови розв’язності та достатні умови однозначної розв’язності.

Моментні зображення записані, використовуючи рівність Парсеваля для узагальнених власних векторів пари відповідних комутуючих операторів.

РОЗДІЛ ІІ. ОБЕРНЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА

Обернена спектральна задача для блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів наведена в [11]. Вона полягає у побудові блочних тридіагональних матриць відповідних або двовимірній проблемі моментів або, можна казати, відповідних борелівській мірі на дійсній площині із умовою, що міра має всі моменти. Наведемо її розгорнуте доведення відповідно до викладеного в [51]. Історично вперше такі матриці з'явились в роботі М.Я. Гехтмана та О.О. Калюжного [11]. Далі в розділі містяться основні результати роботи.

2.1. Ортогоналізація двоіндексної послідовності відповідної сильній проблемі моментів

Нехай $dp(x, y)$ – ймовірнісна міра Бореля з компактним носієм на дійсній площині R^2 і $L_2 = L_2(R^2, dp(x, y))$ – простір інтегровних з квадратом функцій, визначених на R^2. Вважаємо, що носій цієї міри – це компактна множина, яка містить не порожню відкриту підмножину. Тоді функції $R^2 \ni (x, y) \to x^m y^n,\ m, n \in Z$, є лінійно незалежні і утворюють щільну множину в L_2.

Розглянемо оператори множення (та їх обернені):

$$\widehat{A} f(x, y) = x f(x, y) \qquad \widehat{B} f(x, y) = y f(x, y)$$

$$\widehat{A}^{-1} f(x, y) = x^{-1} f(x, y) \qquad \widehat{B}^{-1} f(x, y) = y^{-1} f(x, y)$$

в просторі L_2 . Очевидно, що ці оператори обмежені і самоспряжені. Для знаходження матриць типу Якобі операторів $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ та $\widehat{A}^{-1}$ і $\widehat{B}^{-1}$ вибираємо деякий порядок ортогоналізації в L_2 для сімейства функцій:

$$\{x^m y^n\}, \quad m, n \in Z \tag{2.1}$$

Виберемо деякий порядок ортогоналізації для застосування процедури Шмідта (див. на приклад [10, 33, 34] .

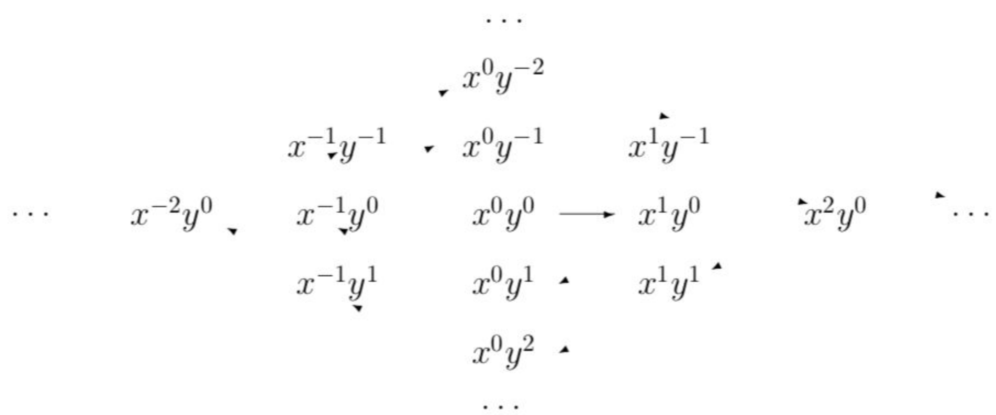

Рис. 2.1 Порядок ортогоналізації

Отже, отримуємо:

$1 = x^0 y^0;$

$x^1 y^0, x^0 y^1, x^{-1} y^0, x^0 y^{-1};$

$x^2 y^0, x^1 y^1, x^0 y^2, x^{-1} y^1, x^{-2} y^0, x^{-1} y^{-1}, x^0 y^{-2}, x^1 y^{-1};$

....

$x^n y^0, x^{n-1} y^1, \ldots, x^1 y^{n-1}, x^0 y^n, x^{-1} y^{n-1}, \ldots, x^{-(n-1)} y^1;$ (2.2)

$x^{-n} y^0, x^{-(n-1)} y^{-1}, \ldots, x^{-1} y^{-(n-1)}, x^0 y^{-n}, x^1 y^{-(n-1)}, \ldots, x^{n-1} y^{-1};$

....

Враховуючи послідовність функцій (2.2), ортогоналізуємо її відповідно до процедури Шмідта. В результаті отримаємо ортонормовану систему поліномів (кожен поліном за змінними $x^m y^n$, $m, n \in Z$), яку позначимо таким чином:

$1 = P_{0,0}(x, y);$

$P_{1,0}(x, y),\ P_{1,1}(x, y),\ P_{1,2}(x, y),\ P_{1,3}(x, y);$

$P_{2,0}(x, y),\ P_{2,1}(x, y),\ P_{2,2}(x, y),\ P_{2,3}(x, y),\ P_{2,4}(x, y),\ P_{2,5}(x, y),$

$P_{2,6}(x, y),\ P_{2,7}(x, y);$

....

$$P_{n,0}(x, y),\ P_{n,1}(x, y),\ P_{n,2}(x, y),\ \ldots,\ P_{n,4n-2}(x, y),\ P_{n,4n-1}(x, y); \tag{2.3}$$

де кожний поліном має вигляд

$$\begin{aligned} P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{\alpha} + \cdots, \alpha = 0,1,\ldots,(n-1); \\ P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{n-\alpha}y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = n, n+1,\ldots,(3n-1); \\ P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha = 2n, 2n+1,\ldots,(3n-1); \\ P_{n;\alpha}(x,y) &= k_{n;\alpha}x^{\alpha-3n}y^{\alpha-4n} + \cdots, \alpha = 3n, 3n+1,\ldots,(4n-1); \end{aligned} \tag{2.4}$$

тут $k_{n,\alpha} > 0$ а $+\ldots$ позначимо наступну частину відповідного полінома; для зручності покладаємо $P_{0;0}(x, y) = 1$. Таким чином $P_{n;\alpha}$ – деякі лінійні комбінації елементів (2.3). Оскільки множина (2.1) є щільною в просторі L_2, то послідовність (2.2) – це ортонормований базис в цьому просторі.

Нехай підпростір $\mathcal{P}_{n;\alpha},\ \forall n \in N$ утворений за (2.4). Очевидно, що $\forall n \in N$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{0;0} \subset \mathcal{P}_{1;0} \subset \mathcal{P}_{1;1} \subset \mathcal{P}_{1;2} \subset \mathcal{P}_{1;3} \subset \mathcal{P}_{2;0} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;0} \subset \mathcal{P}_{n;1} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;4n-1} \subset \cdots, \\ &\mathcal{P}_{n;\alpha} = \{P_{0;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;1}(x,y)\} \oplus \cdots \\ &\qquad \oplus\{P_{n;0}(x,y)\} \oplus \{P_{n;1}(x,y)\} \oplus \cdots \oplus \{P_{n;\alpha}(x,y)\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\{\mathcal{P}_{n;\alpha}(x, y)\},\ n \in N,\ \alpha = 0, 1, \ldots 4n-1$, позначимо одновимірний простір, утворений за $\mathcal{P}_{n;\alpha}(x, y)$; $\mathcal{P}_{0;0} = R$.

2.2. Дослідження блочної структури матриць типу Якобі відповідних сильній проблемі моментів

Для наступного дослідження потрібно замість звичайного простору l_2 ввести Гільбертів простір

$$l_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots, \; H_0 = C, \; H_n = C^{4n}, \; n \in N. \qquad (2.6)$$

Кожен вектор $f \in l_2$ має вигляд $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, f_n \in H_n$, і, отже:

$$\| f \|_{l_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{H_n}^2 < \infty, \quad (f, g)_{l_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{H_n}, \quad \forall f, g \in l_2$$

Для координат вектора $f_n \in H_n, \; n \in N_0$ в деякому ортонормованому базисі $\{e_{n;0}, e_{n;1}, e_{n;2}, \ldots, e_{n;4n-1}\}$ в просторі C^{4n} позначимо через $(f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;4n-1})$ і, отже, отримаємо:

$$f_n = (f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;4n-1})$$

Використовуючи ортонормовану систему (2.3), можна визначити відображення l_2 з (2.6) у L_2. Покладемо

$$P_n(x, y) = P_{n,0}(x, y), P_{n,1}(x, y), P_{n,2}(x, y), \ldots, P_{n,4n-1}(x, y) \in H_n,$$

$\forall (x, y), \in R^2, \; \forall \; n \in N$. Тоді

$$l_2 \in f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \to (If)(x, y) := \widehat{f}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x, y))_{H_n} \in L_2 \qquad (2.7)$$

Тому для $n \in N$ отримаємо

$$(f_n, P_n(x, y))H_n = f_{n;0} \overline{P_{n;0}(x, y)} + f_{n;1} \overline{P_{n;1}(x, y)} + f_{n;2} \overline{P_{n;2}(x, y)} + \cdots + f_{n,n} \overline{P_{4n-1;n}(x, y)},$$

$$\| f \|_{l_2}^2 = \| f_{0;0}, f_{1;0}, f_{1;1}, f_{1;2}, f_{1;3}, f_{2;0} \cdots, f_{n;0}, f_{n;1}, \ldots, f_{n;4n-1}, \ldots \|_{l_2}^2$$

Тоді (2.7) – це відображення простору l_2 в L_2, враховуючи щільність ортонормованої системи (2.3) а, отже, це відображення ізометричне. Відображення (2.7) переводить весь простір l_2 у весь простір L_2, бо система (2.3) – це ортонормований базис в L_2. Тому відображення (2.7) – це унітарне перетворення (позначається I), яке діє з l_2 в L_2.

Нехай Т – лінійний обмежений оператор, визначений на просторі l_2 з (2.6). Тоді існує єдина послідовність $(\tau_{j,\,k})_{j,\,k=0}^{\infty}$, де для кожного $j,\ k \in N_0$ елемент $\tau_{j,\,k}$ є оператором з H_k в H_j так, що

$$(Tf)_j \;=\; \tau_{j,\,k} f_k,\ j \in N_0,\ (Tf, g)_{l_2} \;=\; (\,\tau_{j,\,k}\ f_k,\ g_j)_{H_j}\ ,\ \ f, g \in l_2\,. \tag{2.8}$$

Для доведення (2.8) потрібно тільки описати Т в просторі l_2 з (2.6), використовуючи базис

$$(e_{0;\,0};\ \ e_{1;\,0},\ e_{1;\,1};\ \ e_{1;\,2},\ \ e_{1;\,3},\ \ e_{2;\,0};\ \ldots;\ \ e_{n;\,0},\ \ e_{n;\,1};\ldots;\ \ e_{n;\,4n-1};\ \ldots;\ e_{0;\,0} = 1 \tag{2.9}$$

Тоді $\tau_{j,\,k}$ є оператором $H_k \to H_j$ для кожного $j,\ k \in N_0$. Оператор має матричний вигляд

$$\tau_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} \;=\; (Te_{k,\,\beta},\ e_{j,\,\alpha}\,)_{l_2}\,, \tag{2.10}$$

при $\alpha \;=\; 0, 1, ..., j$ і $\beta \;=\; 0, 1, ..., k$. Перепишемо $\tau_{j,\,k} \;=\; (\tau_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta}\,)_{\alpha,\,\beta=0}^{j,\,k}$

включаючи випадки:

$$\tau_{0,\,k} = (\,\tau_{0,\,k;\,\alpha,\,\beta}\,)_{\alpha,\,\beta=0}^{0,\,k}\,,$$

$$\tau_{j,\,0} = (\,\tau_{j,\,0;\,\alpha,\,\beta}\,)_{\alpha,\,\beta=0}^{j,\,0}\,,$$

$$\tau_{0,\,0} = (\,\tau_{0,\,0;\,\alpha,\,\beta}\,)_{\alpha,\,\beta=0}^{0,\,0}\,.$$

Варто зауважити, що в зображенні (2.8) це правильно і для загального оператора T в просторі l_2 з областю визначення $Dom(T) \;=\; l_{fin} \subset\ l_2$, де l_{fin} позначає фінітні вектори l_2. У цьому випадку перша формула з (2.8) виконується для $f \in l_{fin}$; друга формула – для $f \in l_{fin},\ g \in l_2$.

Розглянемо зображення $\widehat{T} \;=\; I\,T\,I^{-1}\ :\ L_2\ \to L_2$ обмеженого оператора $T\,:\,l_2 \to l_2$ з відображенням (2.7). Ця матриця в базисі (2.3):

$$P_{0,\,0}\,(x,\ y),\ P_{1,\,0}\,(x,\ y),\ P_{1,\,1}\,(x,\ y),\ P_{1,\,2}\,(x,\ y),\ P_{1,\,3}\,(x,\ y),\ P_{2,\,0}\,(x,\ y);\ \ldots;$$

$$P_{n,\,0}\,(x,\ y),\ P_{n,\,1}\,(x,\ y),\ \ldots,\ P_{n,\,4n-1}\,(x,\ y);\ \ldots;$$

дорівнює звичайній матриці оператора T, яка розуміється як оператор: $l_2\ \to\ l_2$ у відповідному базисі (2.9). Використовуючи (2.10) і згадану вище процедуру, отримаємо матричний оператор $\tau_{j,k} = (\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty} T : l_2 \to l_2$. За визначенням ця матриця також є матричним оператором $\widehat{T} : L_2 \to L_2$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній x

Очевидно, що $\widehat{T}$ може бути довільним лінійним обмеженим оператором L_2. Розглянемо T замість $\widehat{T}$, і в якості T візьмемо A і B та A^{-1} і B^{-1} відповідних матрицям J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$.

Лема 2.2.1 Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $P_{m,\beta}$, $n, m \in N_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n-1$, виконуються співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\alpha}, \ \alpha = 1, \ldots, n;\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in P_{n+1;n}, \ \alpha = n, n+1, \ldots, (3n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\alpha+4}, \ \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1);
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Доведення. Відповідно до (2.3) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n \in N_0$, утворений лінійною комбінацією (2.4). Помноживши її на х, отримаємо лінійну комбінацію:

$$
\begin{aligned}
&xP_{n;\alpha}(x,y) = k_{n,\alpha} x^{n-\alpha+1} y^{\alpha} + \ldots, \alpha = 0, 1, \ldots, n-1;\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) = k_{n,\alpha} x^{n-\alpha+1} y^{2n-\alpha} + \ldots, \alpha = n, n+1, \ldots, (3n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) = k_{n,\alpha} x^{\alpha-3n+1} y^{2n-\alpha} + \ldots, \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) = k_{n,\alpha} x^{n-\alpha+1} y^{\alpha-4n} + \ldots, \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1);
\end{aligned}
$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, (n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha = n, n+1, \ldots, (2n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1);\\
&xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+4}, \quad \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1).
\end{aligned}$$

Приєднавши n-ий поліном у перше вкладення і об'єднавши друге і третє вкладення, отримаємо (2.11).

Лема 2.2.2 Нехай $\widehat{A}$ є оператором множення на x в просторі L_2:

$L_2 \ni \phi(x, y) \to (\widehat{A}\,\phi)(x, y) = x\phi\,(x, y) \in L_2$

(Очевидно, що $\widehat{A}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\widehat{A} = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.3) (тобто $A = I^{-1}\widehat{A}\,I$) має тридіагональну структуру: $a_{j,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y),\ n \in N;\ \gamma = 0, 1, \ldots, 4n-1$, отримаємо $\forall j,\ k \in N_0$

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (A\,e_{k;\beta}, e_{j;\alpha})l_2 = \int_{R^2} x\,P_{k;\beta}(x, y)\,\overline{P_{j;\alpha}(x, y)}\,dp\,(x, y), \tag{2.12}$$

де $\alpha = 0, 1, ..., 4j{-}1,\ \beta = 0, 1, ..., 4k{-}1$. Згідно з (2.5) і (2.11) інтеграл в (2.12) дорівнює нулю для $j > k + 1$ для кожного $\beta = 0, 1, \ldots, 4j-1$. З іншого боку, інтеграл у (2.12) має вигляд

$$\begin{aligned}
(a^*)_{j,k;\alpha,\beta} &= \overline{\int_{R^2} xP_{k;\beta}(x,y)\,\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,dp\,(x,y)} =\\
&= \int_{R^2} xP_{j;\alpha}(x,y)\,\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,dp\,(x,y) = \overline{a_{k,j,\beta,\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$ *і* $\beta = 0, 1, \ldots, 4k + 3$. Оскільки оператор $\widehat{A}$ симетричний, з (2.11) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j + 1$ і для кожного $\alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1,\ \beta = 0, 1, \ldots, 4k + 3$

У результаті інтеграл (2.12), тобто коефіцієнти $a_{j,k,\alpha,\beta}$, , $j,\ k \in N_0$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0, 1, ..., 4j-1$, $\beta = 0, 1, ..., 4k-1$ (у попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $P_{0;\,0}(x,\ y) = 1$).

Таким чином матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\widehat{A}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Подальший аналіз виразів (2.12) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(a_{j,k,\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \le 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів $j,\ k$, і $\alpha,\ \beta$.

Лема 2.2.3 Нехай $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на x в L_2,

де $a_{j,k} : H_k \to H_j$; $a_{j,k} = (a_{j,k;\,\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ є матрицями операторів $a_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall j \in N_0$,

$$a_{j,\ j+1;\,\alpha,\alpha+1} = a_{j,j+1;\,\alpha,\alpha+2} = \dots = a_{j,j+1;\,\alpha,j-1} = 0,\ \ \forall\alpha = 0, 1, ..., j-1;$$

$$a_{j+1,\ j;\,\alpha,\beta} = 0,\ \alpha = 0, 1, ..., 3j-2,\ \beta = j+1,\ j+2,\ ...,\ 4j+3;$$

$$a_{j,\ j+1;\,\alpha,\alpha+4} = a_{j,j+1;\,\alpha,\alpha+5} = \dots = a_{j,j+1;\,\alpha,4j+3} = 0,$$

$$\forall\alpha = 3j-1, ...,\ 4j-2; \tag{2.15}$$

Доведення. Відповідно до (2.12) і (2.11) для $j \in N0$, $\forall\alpha = 0, 1, ..., 4j-1$ і $\forall\beta = 0,\ 1,\ ...,\ 4j+3$ маємо:

$$a_{j,j+1;\,\alpha,\beta} = \int_{R^2} xP_{j+1;\,\beta}(x,y)\,\overline{P_{j;\,\alpha}(x,y)}\,dp(x,y) =$$

$$= \int\limits_{R^2} xP_{j;\,\alpha}(x,y)\,\overline{P_{j+1;\,\beta}(x,y)}\,dp(x,y)$$

де $xP_{j;\,\alpha}(x,y)$ належить підпростору з (2.11). Завдяки цьому отримуємо рівності в (2.15). Для $a_{j+1,j}$ можна скористатися симетрією оператора

$$A:\ a_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\beta} = a_{j+1,\,j;\,\beta,\,\alpha},\ j \in N_0,$$

$$\alpha = 0,\ 1, \ldots,\ 4n-1,\ \beta = 0,\ 1, \ldots,\ 4n+3$$

Лема 2.2.4 Елементи $a_{j,\,j+1;\,0,\,0}$, $a_{j,\,j+1;\,1,\,1}$, ..., $a_{j,\,j+1;\,j,\,j}$, $a_{j,\,j+1;\,3j-1,\,3j+3}$,

$$a_{j,\,j+1;\,3j,\,3j+4},\ \ldots,\ a_{j,\,j+1;\,4j-1,\,4j+3},\ n \in N_0 \tag{2.16}$$

матриці $(a_{j,\,k})_{j,\,k=0}^{\infty}$ є додатніми.

Доведення. Почнемо з дослідження $a_{0,\,1;\,0,\,0}$. Позначимо через $P'_{1;\,1}(x,\ y)$ ненормований вектор $P_{1;\,1}(x,\ y)$. Відповідно до (2.8) і (2.7), маємо:

$$P'(x,y) = x-(x,1)_{L^2}$$

Тому, використовуючи (2.12), отримаємо

$$a_{0,\,1;\,0,\,0} = \int\limits_{R^2} x\,P_{0,\,0}(x,\ y)\,dp(x,\ y) = \|\,P'_{1,\,0}(x,\ y)\,\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{R^2} x\,P'_{1,\,1}(x,\ y)\,dp(x,\ y)$$

$$= \|\,P'_{1,\,0}(x,\ y)\,\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{R^2} x\,(x - (x,\ 1)_{L_2})\,dp(x,\ y)$$

$$= \|\,P'_{1,\,0}(x,\ y)\,\|_{L_2}^{-1}(\,\|\,x\,\|_{L_2}^{2} - |\,(x,\ 1)_{L_2}\,|^2)\ , \tag{2.17}$$

де ($1 = P_{0;\,0}(x,\ y)$).

Також, з (2.17), з'ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $a_{0,\,1;\,0,\,0} > 0$.

Оскільки оператор A симетричний, то $a_{0,\,1;\,0,\,0} = a_{1,\,0;\,0,\,0}$.

Додатність в (2.17) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $x \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.3) в просторі L_2 :

$$|(x,\ 1)_{L_2}|^2 + |(x,\ P_{1;\,0}(x,\ y))_{L_2}|^2 + |(x,\ P_{1;\,1}(x,\ y))_{L_2}|^2 + \cdots = /\!/\,x\,/\!/_{L_2}^{2}$$

(2.18)

Розглянемо елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha}$, де $j \in N$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$.

З (2.12) отримаємо

$$a_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\alpha} = \overline{xP_{j+1,\,\alpha+1}(x,\,y)P_{j;\,\alpha}(x,\,y)\,dp(x,\,y)}$$

$$= \int_{R^2} xP_{j,\,\alpha}(x,\,y)\overline{P_{j+1;\,\alpha+1}(x,\,y)}\,dp(x,\,y) \qquad (2.19)$$

Для $P_{j,\,\alpha}(x,\,y)$ отримаємо відповідно до (2.3) і (2.5), $\alpha = 0, 1, \ldots, j$:

$$P_{j;\,\alpha}(x,\,y) = k_{j;\,\alpha}x^{j-\alpha}y^{\alpha} + R_{j;\,\alpha}(x,\,y)$$

(2.20)

де $R_{j;\,\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $P_{j;\,\alpha-1}$, якщо $\alpha = 0,1,...,j$. Тому $x\,R_{j;\,\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $P_{j-1;\,\alpha}$ (див. (2.11) і (2.5)). Помноживши його на x, отримаємо

$$xP_{j;\,\alpha}(x,\,y) = k_{j;\,\alpha}x^{j-\alpha+1}y^{\alpha} + xR_{j;\,\alpha}(x,\,y) \qquad (2.21)$$

де $xR_{j;\,\alpha}(x,y) \in P^{\bullet}_{j+1;\,\alpha}$. З іншого боку, рівність типу (2.20) для індексів $j+1$ дає:

$$P_{j+1;\,\alpha}(x,\,y) = k_{j+1;\,\alpha}x^{j-\alpha+1}y^{\alpha} + R_{j+1;\,\alpha}(x,\,y), \qquad (2.22)$$

де $R_{j+1;\,\alpha}(x,\,y) \in P^{\bullet}_{j;\,\alpha}$, якщо $\alpha = 0, 1, \ldots, j+1$.

Знайдемо $x^{j-\alpha+1}y^{\alpha}$ з (2.22) і підставимо його в (2.21). Отримаємо

$$xP_{j;\,\alpha}(x,\,y) = k_{j;\,\alpha}\,k_{j+1;\,\alpha}(P_{j+1;\,\alpha}(x,\,y) - R_{j+1;\,\alpha}(x,\,y)) + xR_{j;\,\alpha}(x,\,y)$$

$$= \frac{k_{j,\,\alpha}}{k_{j+1,\,\alpha}}\,P_{j+1;\,\alpha}(x,\,y) - k_{j;\,\alpha}\,R_{j+1;\,\alpha}(x,\,y) + xR_{j;\,\alpha}(x,\,y) \qquad (2.23)$$

Другі два члени в (2.23) належать до $P^{\bullet}_{j;\,\alpha}$ та до $P^{\bullet}_{j+1;\,j}$ і в будь-якому разі, ортогональні до $P_{j+1;\,\alpha+1}(x,\,y)$.

Тому підстановка виразу (2.23) у (2.19) дає: $a_{j,j+1;\,\alpha,\,\alpha+1} = \frac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1;\,\alpha+1}} > 0$. Оскільки матриця (2.14) є симетричною, то $a_{j,j+1;\,\alpha,\,\beta} = a_{j,j+1;\,\beta,\,\beta}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n+3$.

Відповідні симетричні елементи матриці теж додатні. Аналогічним чином показуємо позитивність елементів другого рядка в (2.16).

Перепозначимо:

$$a_n = a_{n+1,\, n} \ : H_n \to H_{n+1}$$

$$b_n = a_{n,\, n} \ : H_n \to H_n$$

$$c_n = a_{n,\, n+1} \ : H_{n+1} \to H_n \qquad n \in N_0 \tag{2.24}$$

Попередні дослідження зібрані у такій теоремі.

Теорема 2.2.5 Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну “x” в просторі $L_2(R^2, dp(x,y))$ в ортонормованому базисі (2.3) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі J_x, що діє у просторі (2.6):

$$J_x = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$n \in N_0$, де $c_0 = [c_0;\ 0\ 0\ 0\ ];$

$$c_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} c_{n;0,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & c_{n;1,1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & c_{n;n,n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & c_{n;n+1,n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & c_{n;3n-1,n} & \cdots & c_{n;3n-1,3n+3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * & c_{n;3n,3n+4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & c_{n;4n,4n+2} & 0 \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * & c_{n;4n-1,4n+3} \end{bmatrix}\right\}4n}_{4n+4};$$

b_n – симетрична (4n×4n) - матриця, $n \in N$ (b_0 – скаляр). В $(4n + 4) \times (4n)$ - матриці c_n нульові елементи позначені “0”; додатні елементи – $c\cdot;\cdot,\cdot,$(крім $c_{n;\,3n-1,\,n}$); “*” – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими. Матриця a_n симетрична до матриці c_n, $n \in N_0$.

Матриця J_x діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (l_2)$ за правилом:

$$(J_x f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1},\ n \in N_0\,, \tag{2.26}$$

де покладаємо $a_{-1} := 0, f_{-1} := 0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній y

Дослідимо структуру матриці J_B, яка виникає при множенні відповідного оператора на змінну y .

Лема 2.2.6 Для поліномів $P_{n;\,\alpha}(x,y)$, і підпросторів $\overset{\bullet}{P}_{m,\,\beta}$, $n,\ m \in N_0$, $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n-1$ виконуються співвідношення:

$$yP_{n;\,\alpha}(x,y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,\alpha+1}\,,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n; \tag{2.27}$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,2n+1},\ \alpha = 2n+1, \ldots, 4n-1;$$

Доведення: Видповидно до (2.3) поліном $P_{n;\,\alpha}(x,y)$, $n \in N_0$, утворений лінійною комбінацією (2.4). Помноживши її на y, отримаємо лінійну комбінацію

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) = k_{n,\,\alpha}\,x^{n-\alpha}\,y^{\alpha+1} + \cdots,\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) = k_{n,\,\alpha}\,x^{n-\alpha}\,y^{2n-\alpha+1} + \cdots,\ \alpha = n,\ n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) = k_{n,\,\alpha}\,x^{\alpha-3n}\,y^{2n-\alpha+1} + \cdots,\ \alpha = 2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) = k_{n,\,\alpha}\,x^{\alpha-3n}\,y^{\alpha-4n+1} + \cdots,\ \alpha = 3n,\ 3n+1,\ \ldots,\ (4n-1);$$

Тоді матимемо:

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,\alpha+1}\,,\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,\alpha+1},\ \alpha = n,\ n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,2n+1}\,,\ \alpha = 2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$yP_{n;\,\alpha}(x,\ y) \in \overset{\bullet}{P}_{n+1;\,2n+1}\,,\ \alpha = 3n,\ 3n+1,\ \ldots,\ (4n-1);$$

Поєднуючи перше, друге вкладення та $\alpha = 2n$ з третього, отримуємо перший рядок з (2.27). Решта є другим рядком з (2.27).

Лема 2.2.7 Нехай $\widehat{B}$ є оператором множення на у в просторі L_2 : $L_2 \ni \gamma(x,\ y) \to (\widehat{B}\gamma)(x,\ y) = y\,\gamma\,(x,\ y) \in L_2$.

(Очевидно, що $\widehat{B}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\widehat{B} = (b_j, k)_{j,\,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.3) (тобто $B = I^{-1}\widehat{B}I$) має тридіагональну структуру: $b_{j,\,k} = 0$ для $|\,j-k\,| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{0;\,0} = I^{-1}P_{0;\,0}(x,\ y)$ та

$e_{n;\,\gamma} = I^{-1}P_{n;\,\gamma}(x,\ y)$, $n \in N$; $\gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n-1$, отримаємо $\forall j,\ k \in N_0$

$$u_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (Be_{k;\,\beta}\,,\ e_{j;\,\alpha})l_2 = \int_{R^2} yP_{k;\,\beta}\,(x,\ y)P_{j;\,\alpha}(x,\ y)\,dp(x,\ y) \qquad (2.28)$$

де $\alpha = 0, 1, ..., 4j{-}1,\ \beta = 0, 1, ..., 4k+3$. Згідно з (2.5) і (2.11) інтеграл в (2.28) дорівнює нулю для $j > k + 1$ для кожного $\beta = 0,\ 1,\ ...,\ 4j - 1$.

З іншого боку, інтеграл у (2.28) має вигляд

$$(u^*)_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = \overline{R^2\ y\ P_{k;\,\beta}\,(x,\ y)\ P_{j;\,\alpha}\,(x,\ y)\ dp(x,\ y)} =$$

$$= \int_{R^2} y\ P_{j,\,\alpha}\,(x,\ y)\ \overline{P_{k;\,\beta}\ (x,\ y)}\ dp(x,\ y) = \overline{u_{k,\ j,\,\beta,\,\alpha}}\,, \qquad (2.29)$$

де $\alpha = 0,\ 1,\ ...,\ 4j - 1$ і $\beta = 0,\ 1,\ ...,\ 4k + 3$. Оскільки оператор $\widehat{B}$ симетричний, з (2.11) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j + 1$ і для кожного $\alpha = 0,\ 1,\ ...,\ 4j - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ ...,\ 4k + 3$.

У результаті інтеграл (2.28), тобто коефіцієнти $u_{k,\ j,\,\beta,\,\alpha,}$, $j,\ k \in N$, дорівнюють нулю для $|\,j - k\,| > 1;\ \alpha = 0,\ 1, ...,\ 4j - 1,\ \beta = 0, 1, ...,\ 4k - 1$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $P_{0;\,0}\,(x,\ y) = 1$).

Таким чином матриця $(u_{j,\,k})_{j,\,k\,=\,0}^{\infty}$ оператора $\widehat{B}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

Подальший аналіз виразів (2.28) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(u_{j,\,k,\,\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta\,=\,0}^{j,\,k}$ в кожному випадку для $|\,j - k\,| \le 1$. Використовуємо також властивості перестановок матричних індексів $j,\ k$, і $\alpha,\ \beta$.

Лема 2.2.8 Нехай $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на у в L_2, де $u_{j,k}: H_k \to H_j$; $u_{j,k} = (u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ є матрицями операторів $u_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall j \in N_0$,

$$u_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = u_{j,j+1;\alpha,\alpha+3} = \cdots = u_{j,j+1;\alpha,4j+3} = 0, \forall \alpha = 0, 1, ..., 2j-1$$

$$u_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \forall \alpha = 2j, ..., 4j-1, \forall \beta = 2j+1, ..., 4j+3 \qquad (2.31)$$

Доведення. Відповідно до (2.27) і (2.28) для

$j \in N$, $\forall \alpha = 0, 1, ..., 4j-1$ і $\forall \beta = 0, 1, ..., 4j+3$ маємо:

$$u_{j,\ j+1,\alpha,\beta} = \int_{R^2} y\, P_{j+1,\beta}(x,\ y)\, \overline{P_{j;\alpha}(x,\ y)}\, dp(x,\ y)$$

$$= \int_{R^2} y\, P_{j,\alpha}(x,\ y)\, \overline{P_{j+1;\beta}(x,\ y)}\, dp(x,\ y)$$

де $y\, P_{j,\alpha}(x,\ y)$ належить підпростору з (2.28). Завдяки цьому отримуємо рівності в (2.31).

Для $u_{j+1,\ j}$ можна скористатися симетрією оператора

$B: u_{j,\ j+1;\alpha,\beta} = u_{j+1,\ j;\beta,\alpha}, j \in N0, \alpha = 0, 1, ..., 4j-1$ і $\beta = 0, 1, ..., 4j+3$

Лема 2.2.9 Елементи $u_{j,\ j+1;0,1}, u_{j,\ j+1;1,2}, \ldots, u_{j,\ j+1;2j+1,2j+2}, j \in N,$ (2.32)

матриці $(u_{j,k})_{j,k}^{\infty} = 0$ є додатними.

Доведення. Почнемо з дослідження $u_{0,1;0,1}$. Позначимо через $P'_{1,1}(x,\ y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,\ y)$. Відповідно до (2.8) і (2.7), маємо:

$$P'(x,\ y) = y - (y,\ P_{1;0}(x,\ y))_{L_2} P_{1;0}(x,\ y) - (y,\ 1)_{L_2}.$$

Тому, використовуючи (2.28), отримаємо

$$u_{0,1;0,1} = \int_{R^2} y\, P_{0,\ 0}\, P_{1,1}(x,\ y)\, dp(x,\ y)$$

$$= /\!/ P_{1;1}(x,y) /\!/_{L_2}\, y\, P_{1;1}(x,y)\, dp(x,\ y)\, u_{0,1;0,1} =$$

$$= \left\| P'_{1;\,1}(x,\, y) \right\|_{L_2}^{-1} \int_{R^2} y(x - (y,\, P_{1;\,0}(x,\, y))_{L_2} P_{1;\,0}(x,\, y) - (y,\, 1)_{L_2})\, dp(x,\, y)$$

$$= \left\| P'_{1;\,1}(x,\, y) \right\|_{L_2}^{-1} \quad (/\!/ y /\!/_{L_2}^{2} - |\,(y,\, P_{1;\,0}(x,\, y))_{L_2}\,|^2 - |(y,\, 1)_{L_2}\,|^2) \qquad (2.33)$$

де $(1 = P_{0;\,0}(x,\, y))$.

Також, з (2.33) з’ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $u_{0,\,1;\,0,\,1} > 0$.

Оскільки оператор B симетричний, то $u_{0,\,1;\,0,\,1} = u_{1,\,0;\,1,\,0}$. Додатність в (2.33) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $y \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.3) в просторі L_2:

$$|(y,\, 1)_{L_2}\,|^2 + |(y,\, P_{1;\,0}(x,\, y))_{L_2}|^2 + |(y,\, P_{1;\,1}(x,\, y))_{L_2}\,|^2 + \cdots = /\!/ y /\!/_{L_2}^{2}$$

(2.34)

Розглянемо елементи $u_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\alpha+1}$, де $j \in N$, $\alpha = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2j + 1$. З (2.28) отримаємо

$$u_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\alpha+1} = R^2 y\, P_{j+1,\,\alpha+1}(x,y)\, P_{j;\,\alpha}(x,y)\, dp(x,y)$$

$$= \int_{R^2} y P_{j,\,\alpha}(x,\, y) \overline{P_{j+1;\,\alpha+1}}(x,\, y)\, dp(x,\, y)\,. \qquad (2.35)$$

Для $P_{j;\,\alpha}(x,\, y)$ отримаємо відповідно до (2.3) і (2.5)

$\alpha = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2j + 1$:

$$P_{j;\,\alpha}(x,\, y) = k_{j;\,\alpha}\, x^{\,j-\alpha}\, y^{\alpha} + R_{j;\,\alpha}(x,\, y) \qquad (2.36)$$

де $R_{j;\,\alpha}(x,\, y)$ – деякий поліном з $P_{j;\,\alpha-1}$ (див. (2.11) і (2.5)).

Помноживши $P_{j;\,\alpha}(x,\, y)$ на y, отримаємо

$$yP_{j;\,\alpha}(x,\, y) = k_{j;\,\alpha}\, x^{j-\alpha}\, y^{\,\alpha+1} + yR_{j;\,\alpha}(x,\, y) \qquad (2.37)$$

де $y\, R_{j;\,\alpha}(x,\, y) \in \dot{P}_{j+1;\,\alpha+1}$.

З іншого боку, рівність (2.36) для $P_{j+1,\,\alpha+1}(x,\, y)$ дає:

$$P_{j+1;\,\alpha+1}(x,\, y) = k_{j+1;\,\alpha}\, x^{j-\alpha}\, y^{\,\alpha+1} + R_{j+1;\,\alpha+1}(x,\, y) \qquad (2.38)$$

де $R_{j+1;\,\alpha+1}(x,\, y) \in P_{j+1;\,\alpha+1}$.

Знайдемо $x_{j-\alpha}\, y^{\alpha+1}$ з (2.38) і підставимо його в (2.37). Отримаємо:

$$y\,P_{j;\,\alpha}(x,\ y) \ = \frac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1;\,\alpha}}(P_{j+1;\,\alpha}(x,\ y) - R_{j+1;\,\alpha+1}(x,\ y)) \ + \ y\,R_{j;\,\alpha}(x,\ y) \qquad (2.39)$$

$$= \ \frac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1;\,\alpha}}\,P_{j+1;\,\alpha}(x,\ y) - \frac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1;\,\alpha}}\,R_{j+1;\,\alpha+1}(x,\ y) \ + \ y\,R_{j;\,\alpha}(x,\ y)$$

Другі два члени в (2.39) належать до $\dot{P}_{j+1;\,\alpha}$ і ортогональні до $P_{j+1;\,\alpha+1}(x,\ y)$.

Тому підстановка виразу (2.39) у (2.35) дає:

$u_{j,\ j+1;\,\alpha,\,\alpha+1} \ = \ \frac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1;\,\alpha+1}} \ > \ 0$. Оскільки матриця (2.30) є симетричною, то елементи $u_{j,\ j+1;\ \alpha,\ \alpha+1} \ = \ u_{j,\ j+1;\,\alpha,\ \alpha+1}$ також додатні

$j \in N,\ \alpha \ = \ 0,\ 1,\ \ldots,\ 2j \ + \ 1$. Перепозначимо:

$$u_n \ = \ u_{n+1,\,n} \ : H_n \to H_{n+1}\,,$$

$$\omega_n \ = \ u_{n+1,\,n} \ : H_n \to H_n\,, \qquad (2.40)$$

$$\upsilon_n \ = \ u_{n,\,n+1} \ : H_{n+1} \to H_n\,,$$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.2.10 Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну “y” в просторі $L_2\,(R^2,\ dp(x,\ y))$ в ортонормованому базисі (2.3) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі, що діє у просторі (2.6):

$$J_y = \begin{bmatrix} w_0 & u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & w_1 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & w_2 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} v_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ u_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{array} \qquad (2.41)$$

$n \in N_0$, де $u_0 \ = \ [\ *\, u_{0;\,0,\,1}\ 0\ 0\ ]$;

$$u_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & u_{n;0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & u_{n;1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & u_{n;2n-2,2n} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;2n-1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \vdots & u_{n;4n-1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{4n+4}\right\} 4n,$$

$u_n = (4n+4)\times(4n)$ - матриця, де нульові елементи позначені “0”; додатні елементи – $u_{\cdot;\,\cdot,\,\cdot}$ (крім $u_{n;\,0,\,0}$); “*” – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими; w_n – симетрична ($4n \times 4n$) - матриця, $n \in N$ (w_0 – скаляр). Матриця v_n симетрична до матриці u_n, $n \in N_0$.

Матриця J_y діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (l_2)$ за правилом:

$$(J_y f)_n = v_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + u_n f_{n+1},\ n \in N_0, \tag{2.42}$$

де покладаємо $v_{-1} \coloneqq 0,\ f_{-1} \coloneqq 0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній x^{-1}

Дослідимо структуру матриці $J_{A^{-1}}$, яка виникає при розгляді оператора множення на змінну x^{-1} . Розглянемо замість оператора $\hat{T}$ оператор A^{-1} відповідної матриці $J_{A^{-1}}$.

Лема 2.2.11 Для поліномів $P_{n;\,\alpha}(x, y)$, і підпросторів $P_{m,\,\beta},\ n,\ m \in N_0,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1,\ \beta = 0, 1, \ldots, 4n-1$,

виконуються співвідношення:

$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n;\,3n-1} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,\alpha+2}, \ \alpha = n, \ n+1, \ldots, 3n;$$

$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,3n+2}, \ \alpha = 3n+1, \ldots, 4n-1 \qquad (2.43)$$

Доведення. Відповідно до (2.3) поліном $P_{n;\,\alpha}\,(x,\ y)$, $n \in N_0$, утворений лінійною комбінацією (2.4). Отже, помноживши її на x^{-1}, отримаємо лінійну комбінацію

$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\,n-\alpha-1} y^{\,\alpha} + \cdots, \alpha = 0, 1, \ldots, (n-1);$$
$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\,n-\alpha-1} y^{\,2n-\alpha} + \cdots, \alpha = n, n+1, \ldots, (3n-1);$$
$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\,\alpha-3n-1}\, y^{\,2n-\alpha} + \cdots, \alpha = 2n, 2n+1, \ldots, (3n-1);$$
$$x^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\,\alpha-3n-1}\, y^{\,\alpha-4n} + \cdots, \alpha = 3n, 3n+1, \ldots, (4n-1). \qquad (2.44)$$

Поєднуючи в (2.44) другий і третій рядки та перший елемент четвертого рядка отримуємо (2.43).

Лема 2.2.12 Нехай $\hat{A}^{-1}$ є оператором множення x^{-1} в просторі L_2:

$$L_2 \ni \gamma\,(x,\ y) \mapsto (\hat{A}^{-1}\gamma)\,(x,\ y) = x^{-1}\,\gamma\,(x,\ y) \in L_2\,.$$

(Очевидно, що $\hat{A}^{-1}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\hat{A}^{-1} = (p_{j,\,k})_{j,\,k\,=\,0}^{\infty}$ в базисі (2.3) (тобто $\hat{A}^{-1} = I^{-1}\,\hat{A}^{-1}\,I$ має тридіагональну структуру: $p_{j,\,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для

$e_{0;\,0} = I^{-1}\,P_{0;\,0}\,(x,y)\ i\ e_{n;\,\gamma} = I^{-1}P_{n,\,\gamma}\,(x,y),\ n \in N;\ \gamma = 0, 1, \ldots, 4n-1,$
отримаємо $\forall j, k \in N_0$

$$p_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (A^{-1}e_{k,\,\beta}, e_{j,\,\alpha})_{l_2} = \int_{R^2} x^{-1}P_{k;\,\beta}\,(x,y)\,\overline{P_{j,\,\alpha}(x,y)}\,dp(x,y)\,, \qquad (2.45)$$

де $\alpha = 0,\ 1, \ldots, 4j-1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k+3$. Згідно з (2.5) і (2.43) інтеграл в (2.45) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j-1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k+3$.

З іншого боку, інтеграл у (2.45) має вигляд

$$(p^*)_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = \int\limits_{R^2} x^{-1} P_{k;\,\beta}(x,y)\,\overline{P_{j,\,\alpha}(x,y)}\,dp(x,y)$$

$$= \overline{\int\limits_{R^2} x^{-1}\, P_{j;\,\alpha}\,(x,y)\,\overline{P_{k,\,\beta}(x,y)}\,dp(x,y)} = \overline{P_{k,\ j;\,\beta,\,\alpha}}\ , \tag{2.46}$$

де $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j-1\ i\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k+3$. Оскільки оператор $\hat{A}^{-1}$ симетричний, з (2.43) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j + 1$ і для кожного $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k + 3$.

У результаті інтеграл (2.45), тобто коефіцієнти $p_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta},\ j,\ k \in N$, дорівнюють нулю для

$$|j - k| > 1;\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k + 3.$$

(У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;\,0} = I^{-1}\ P_{0;\,0}\,(x,\ y)$, $P_{0;\,0}\,(x,\ y) = 1$).

Таким чином матриця $(p_{j,\,k})_{j,\,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}^{-1}$ має тридіагональну блочну структуру

$$[p_{0,\,0}\, p_{0,\,1}\ 0\ 0\ 0 \cdots p_{1,\,0}\, p_{1,\,1}\, p_{1\,,2}\ 0\ 0 \cdots 0\, p_{2,\,1}\, p_{2,\,2}\, p_{2,\,3}\ 0 \cdots \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ddots\,]. \tag{2.47}$$

Подальший аналіз виразів (2.45) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(p_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta})_{j,\,k=0}^{\infty}$ в кожному випадку для $|j - k| \le 1$.

Використо- вуємо також властивості перестановок матричних індексів j, k, і α, β.

Лема 2.2.13 Нехай $(p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ – матричний оператор множення на $x^{-1}-1$ в L_2, де $p_{j,k} : H_k \to H_j$; $p_{j,k} = (p_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{\infty}$ є матрицями операторів $p_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді $\forall\, j \in N_0$,

$$\begin{aligned}
&p_{j,\,j+1;\,\alpha,\beta} = 0, \quad \forall\, \alpha = 0, 1, \ldots, j-1,\ \forall\, \beta = 0, 1, \ldots, 4j-1;\\
&p_{j,\,j+1;\,\alpha,\alpha+1} = \cdots = p_{j,\,j+1;\,\alpha,4j-1} = 0,\ \forall\, \alpha = j, j+1, \ldots, 3j;\\
&p_{j,\,j+1;\,\alpha,\beta} = 0,\ \forall \alpha = 3j+1, \ldots, 4j-1,\ \forall\, \beta = 3j+3, \ldots, 4j+3
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Доведення. Відповідно до (2.45) і (2.43) для $j \in N_0$, $\forall\, \alpha = 0, 1, \ldots, 4j-1$ і $\forall\, \beta = 0, 1, \ldots, 4j+3$ маємо

$$p_{j,\,j+1;\,\alpha,\beta} = \int_{R^2} x^{-1} P_{j+1,\beta}(x, y)\, \overline{P_{j,\alpha}(x, y)}\, dp(x, y)$$

$$\overline{}$$

$$= \int_{R^2} x^{-1} P_{j;\alpha}(x, y)\, \overline{P_{j+1,\beta}(x, y)}\, dp(x, y),$$

де $x^{-1} P_{j;\alpha}(x, y)$ належить підпростору з (2.43). Завдяки цьому отримуємо рівності в (2.48).

Для $p_{j+1,j}$ можна скористатися симетрією оператора

$A^{-1} : p_{j,\,j+1;\,\alpha,\beta} = p_{j+1,\,j;\,\beta,\alpha}$.

Лема 2.2.14 Елементи

$$p_{0,1;0,2}, \ldots, p_{j;\,j+1,\alpha,\alpha+2},\ j \in N,\quad \alpha = j, j+1, \ldots, 2j. \tag{2.49}$$

матриці $(p_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ є додатніми.

Доведення. Почнемо з дослідження $p_{0,1;0,2}$. Позначимо через $P'_{1;2}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;2}(x,y)$. Відповідно до (2.8) і (2.7), маємо:

$$P'_{1;\,2}(x,y) = x^{-1} - (x^{-1},1)_{L_2} - (x^{-1}, P_{1;\,0}(x,y))_{L_2} P_{1;\,0}(x,y)$$

$$- (x^{-1}, P_{1\,;1}(x,y))_{L_2} P_{1;\,1}(x,y)$$

Тому, використовуючи (2.12), отримаємо

$$p_{0,\,1;\,0,\,2} = \int_{R^2} x^{-1} P_{0;\,0} P_{1;\,2}\,(x,y) dp(x,y) = \|\,P'_{1;\,2}(x,y)\,\|_{L_2}^{-1} \int_{R^2} x^{-1} P'_{1;\,2}(x,y)\, dp(x,y)$$

$$= \|\,P'_{1;\,2}(x,y)\,\|_{L_2}^{-1} \int_{R^2} (x^{-1} - (x^{-1},1)_{L_2} - (x^{-1}, P_{1;\,0}\,(x,y))_{L_2} P_{1;\,0}(x,y)$$

$$- (x^{-1}, P_{1;\,1}(x,y))_{L_2}\, P_{1;\,1}(x,y))\, dp(x,y) = \|\,P'_{1;\,1}(x,y)\,\|_{L_2}^{-1} \left(\|\,x^{-1}\,\|_{L_2}^{2} \right.$$

$$\left. - |(x^{-1},1)_{L_2}|^2 - |(x^{-1}, P_{1;\,0}(x,y))|^2 - |(x^{-1}, P_{1;\,1}(x,y))|^2 \right), \qquad (2.50)$$

де $(1 = P_{0;\,0}\,(x,\,y))$.

Також, з (2.50), з'ясовуємо, що останній вираз додатній і, отже, $p_{0,\,1;\,0\,,2} > 0$. Оскільки оператор A^{-1} симетричний, то $p_{0,\,1;\,0,\,2} = p_{1,\,0;\,2,\,0}$ також додатній. Додатність в (2.50) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $x^{-1} \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.3) в просторі L_2:

$$|(x,1)_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \cdots = \|\,x\,\|_{L_2}^{2}\,. \qquad (2.51)$$

Розглянемо елементи , де $j \in N$, $\alpha = j,\, j+1,\, \ldots,\, 2j$. З (2.12) отримаємо

$$p_{j,\; j+1;\, 1,\, \alpha+2} = \int_{R^2} x^{-1}\, P_{j+1,\,\alpha+2}\,(x,\;y)\, \overline{P_{j;\,\alpha}(x,\;y)}\, dp(x,\;y)$$

$$= \overline{\int_{R^2} x^{-1}\, P_{j;\,\alpha}(x,\;y)\, \overline{P_{j+1,\,\alpha+2}(x,\;y)}\, dp(x,\;y)} \qquad (2.52)$$

Для $P_{j;\,\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.3) і (2.5):

$$P_{j;\,\alpha}(x,\;y) = k_{j;\,\alpha}\, x^{|2j-\alpha|-j}\, y^{2j-\alpha} + R_{j;\,\alpha}\,(x,\;y) \qquad (2.53)$$

де $R_{j;\,\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $P_{j;\,\alpha-1}$, якщо $\alpha = j, j+1, \ldots, 2j$. Тому $x^{-1}R_{j;\,\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $P_{j+1;\,\alpha+1}$ (див. (2.11) і (2.5)). Помноживши його на x^{-1} , отримаємо

$$x^{-1}P_{j;\,\alpha}(x,y) = k_{j;\,\alpha}\, x^{|2j-\alpha|-j-1}\, y^{2j-\alpha} + R_{j;\,\alpha}(x,y)\,, \tag{2.54}$$

де $x^{-1}\, R_{j;\,\alpha}(x,y) \in P_{j+1;\,\alpha+1}$. З іншого боку, рівність (2.53) дає:

$$P_{j+1,\,\alpha+2}\,(x,y) = k_{j+1,\,\alpha+2}\, x^{|2(j+1)-(\alpha+2)|-(j+1)}\, y^{2(j+1)-(\alpha+2)} + R_{j+1;\,\alpha+1}(x,y)$$

$$= k_{j+1,\,\alpha+2}\, x^{|2j-\alpha|-j-1}\, y^{2j-\alpha} + R_{j+1;\,\alpha+1}(x,y)\,, \tag{2.55}$$

де $R_{j+1;\,\alpha}(x,y) \in P_{j;\,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j+1$.

Знайдемо $x^{|2j-\alpha|-j-1}\, y^{2j-\alpha}$ з (2.55) і підставимо його в (2.54). Отримаємо:

$$x^{-1}\, P_{j;\,\alpha}(x,y) = \tfrac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1,\,\alpha+2}}(P_{j+1,\,\alpha+2}(x,y) - R_{j+1;\,\alpha+1}(x,y)) + x^{-1}R_{j;\,\alpha}(x,y)$$

$$= \tfrac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1,\,\alpha+2}}P_{j+1,\,\alpha+2}(x,y) - \tfrac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1,\,\alpha+1}}R_{j+1;\,\alpha}(x,y) + x^{-1}R_{j;\,\alpha}(x,y) \tag{2.56}$$

Другі два члени в (2.56) належать до $P_{j;\,\alpha}$ та до $P_{j+1;\,\alpha+1}$ і, в будь-якому разі, ортогональні до $P_{j+1;\,\alpha+2}\,(x,y)$.

Тому підстановка виразу (2.56) у (2.52) дає: $p_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\alpha+2} = \tfrac{k_{j;\,\alpha}}{k_{j+1,\,\alpha+2}} > 0$.

Оскільки матриця (2.14) є симетричою, то

$p_{j,\,j+1;\,\alpha,\,\beta} = p_{j,\,j+1;\,\beta,\,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n-1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n+3$.

Отже, симетричні елементи теж додатні.

Перепозначимо:

$$p_n = p_{n+1,\,n} : H_n \to H_{n+1} \quad r_n = p_{n,\,n} : H_n \to H_n \quad q_n = p_{n,\,n+1} : H_{n+1} \to H_{n},\ n \in N_0 \tag{2.57}$$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.2.15 Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "x^{-1}" в просторі $L_2(R^2, dp(x, y))$ в ортонормованому базисі (2.3) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{x^{-1}}$, що діє у просторі (2.6):

$$J_{x^{-1}} = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} p_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ r_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ q_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{array} \tag{2.58}$$

$n \in N_0$, де $r_0 = [r_{0;0,0}]$ – скаляр;

$$r_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} * & * \cdots 0 * & \cdots r_{n;0,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ * & * \cdots 0 * & \cdots r_{n;1,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * \cdots 0 * & \cdots r_{n;n-1,3n-1} & 0 \cdots 0 \\ * & * \cdots 0 * & \cdots * & * \cdots r_{n;n,4n-1} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ r_{n;3n-1,0} & * \cdots 0 * & \cdots * & * \cdots * \\ 0 & 0 \cdots 0\, r_{n;3n,n} & \cdots * & * \cdots * \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0\, r_{n;4n-1,n} & \cdots * & * \cdots * \end{bmatrix}\right\} 4n}_{4n};$$

r_n - симетрична $(4n \times 4n)$- матриця, де нульові елементи позначені "0"; додатні елементи – $r_{.;.,.}$ (крім $r_{n;n,4n-1}$, $r_{n;3n-1,0}$); "*" – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими;

$q_0 = [\, * * q_{0;0,2}\ 0\,]$,

$$q_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ q_{n;n,0} & q_{n;n,1} & \cdots q_{n;n,n+2} & 0 & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ * & * & \cdots * & q_{n;n+1,n+3} & \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & \cdots * & * & \cdots q_{n;3n,3n+2} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * & \cdots * & * & \cdots q_{n;4n-1,3n+2} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}}_{4n+4} \Bigg\} 4n;$$

q_n– $(4n + 4) \times (4n)$ – матриця де нульові елементи позначені “0”; додатні елементи – $q_{\cdot;\cdot,\cdot}$ (крім $q_{n;\,n,\,0}$, $q_{n;\,n,\,1}$); “*” – елементи, які можуть бути і нульовими і ненульовими. Матриця p_n симетрична до матриці q_n, $n \in N_0$.

Матриця $J_{x^{-1}}$ діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (l_2)$ за правилом:

$$(J_{x^{-1}})_n = (J_y f)_n = p_{n-1} f_{n-1} + r_n f_n + q_n f_{n+1}, \quad n \in N_0, \tag{2.59}$$

де покладаємо $p_{-1} \coloneqq 0$, $f_{-1} \coloneqq 0$.

Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної змінній y^{-1}

Дослідимо структуру матриці $J_{B^{-1}}$, яка виникає при множенні відповідного оператора на змінну y^{-1}. Розглянемо замість оператора $\hat{T}$ оператор B^{-1} матриці $J_{B^{-1}}$.

Лема 2.2.16 Для поліномів $P_{n;\,\alpha}(x, y)$, і підпросторів $P_{m,\,\beta}$, n, $m \in N_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4n - 1$, $\beta = 0, 1, \ldots, 4n - 1$, виконуються співвідношення:

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,4n-1}, \ \ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,(4n-1). \qquad (2.60)$$

Доведення. Відповідно до (2.3) поліном

$P_{n;\,\alpha}(x,\ y),\ n \in N_0,\ \ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,(4n-1),$ утворений лінійною комбінацією (2.4). Отже, помноживши її на y^{-1} , отримаємо лінійну комбінацію

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\,x^{\,n-\alpha}\,y^{\,\alpha-1} + \cdots,\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1);$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\,x^{\,n-\alpha}\,y^{\,2n-\alpha-1} + \cdots,\ \alpha = n,\ n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\,x^{\,\alpha-3n}\,y^{\,2n-\alpha-1} + \cdots,\ \alpha = 2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) = k_{n;\,\alpha}\,x^{\,\alpha-3n}\,y^{\,\alpha-4n-1} + \cdots,\ \alpha = 3n,\ 3n+1,\ \ldots,\ (4n-1)$$

Тоді матимемо:

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,4n-1}\ \ \alpha = 1,\ \ldots,\ n-1;$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,4n-1}\ \ \alpha = n,\ n+1,\ \ldots,\ (2n-1);$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,4n-1}\ \ \alpha = 2n,\ 2n+1,\ \ldots,\ (3n-1);$$

$$y^{-1}P_{n;\,\alpha}(x,y) \in P_{n+1;\,4n-1}\ \ \alpha = 3n,\ 3n+1,\ \ldots,\ (4n-1);$$

Поєднуючи останні вкладення в одне, отримуємо (2.60). □

Лема 2.2.17 Нехай $\hat{B}^{-1}$ є оператором множення на y^{-1} в просторі L_2 :
$L_2 \ni \gamma\,(x,\ y) \mapsto (\hat{B}^{-1}\gamma)\,(x,\ y) = y^{-1}\,\gamma\,(x,y) \in L_2$.

(Очевидно, що $\hat{B}^{-1}$ – самоспряжений і обмежений). Матриця $\hat{B}^{-1} = (\psi_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ в базисі (2.3) (тобто $B^{-1} = I^{-1}\hat{B}^{-1}I$) має тридіагональну структуру: $\psi_{j,k} = 0$ для $|j - k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для

$$e_{n,\gamma} = I^{-1}P_{n,\gamma}(x,y),\ n \in N;\ \gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n - 1,$$

отримаємо $\forall j,\ k \in N_0$

$$\psi_{j,k;\alpha,\beta} = (B^{-1}e_{k;\beta},\ e_{j,\alpha})_{l_2} = \int_{R^2} y^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\,\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,dp\,(x,y)\,, \qquad (2.61)$$

де $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k+3$. Згідно з (2.5) і (2.60) інтеграл в (2.61) дорівнює нулю для $j > k+1$ для кожного $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j-1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j+3$.

З іншого боку, інтеграл у (2.61) має вигляд

$$\psi_{j,k;\alpha,\beta} = \int_{R^2} y^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\,\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,dp\,(x,y)$$

$$= \overline{\int_{R^2} y^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)\,\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,dp\,(x,y)} = \overline{\psi_{k,j;\beta,\alpha}} \qquad (2.62)$$

де $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j-1$ *і* $\beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k+3$. Оскільки оператор $\hat{B}^{-1}$ симетричний, з (2.60) маємо, що останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j + 1$ і для кожного $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k + 3$.

У результаті інтеграл (2.61), тобто коефіцієнти $\psi_{j,k;\alpha,\beta},\ j,\ k \in N$, дорівнюють нулю для

$$|j - k| > 1;\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4j - 1,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4k - 1.$$

(У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;\,0} = I^{-1} P_{0;\,0}(x,y),\ \ P_{0;\,0}(x,y) = 1)$. □

Таким чином матриця $(\psi_{j,\,k})_{j,\,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}^{-1}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} \psi_{0,0} & \psi_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \psi_{1,0} & \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Перепозначимо:

$\psi_n = \psi_{n+1,\,n} : H_n \to H_{n+1}$

$\omega_n = \psi_{n,\,n} : H_n \to H_n$

$\phi_n = \psi_{n,\,n+1} : H_{n+1} \to H_n,\ n \in N_0$

Попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.2.18 Обмежений самоспряжений оператор із циклічним вектором множення на незалежну змінну "y^{-1}" в просторі $L_2(R^2, dp(x, y))$ в ортонормованому базисі (2.3) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{y^{-1}}$, що діє у просторі (2.6)

$$J_{y^{-1}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \psi_0 & \omega_1 & \phi_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \psi_1 & \omega_2 & \phi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\phi_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ &\omega_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ &\psi_n : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{2.65}$$

$n \in N_0$, де ω_n – симетрична $(4n \times 4n)$- матриця, $n \in N$ (ω_0 – скаляр); ψ_n – $(4n \times (4n+4))$ - матриця, в якій елементи можуть бути і нульовими і ненульовими. ϕ_n – $((4n+4) \times 4n)$- матриця. Матриця ϕ_n симетрична до матриці ψ_n , $n \in N_0$.

Матриця $J_{y^{-1}}$ діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (l_2)$ за правилом:

$$(J_{y^{-1}} f)_n = \psi_{n-1} f_{n-1} + \omega_n f_n + \phi_n f_{n+1}, \quad n \in N_0 , \tag{2.66}$$

де покладаємо $\psi_{-1} := 0, f_{-1} := 0.$

Висновки. Побудовані блочні матриці типу Якобі за заданою ймовірнісною мірою з носієм на компакті на дійсній площині. Вважається, що у міри існують всі моменти та система поліномів $x^n y^m$, $n, m \in Z$ лінійно незалежною і тотальною у відповідному просторі L_2. Тобто, розв'язана обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів. Дано опис внутрішньої структури блочних матриць типу Якобі відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів: вказані обов'язково нульові та додатні елементи. Досліджені комутативні властивості блочних матриць, відповідних не сильній проблемі моментів, та на основі цих матриць наведені алгоритми побудови численних прикладів.

РОЗДІЛ ІІІ ПРЯМА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА

Одним із основних результатів роботи є розв'язання прямої спектральної задачі і відновлення міри за заданими блочними матрицями. Під відновленням розуміємо запис відповідних рівностей Парсеваля за узагальненими власними векторами.

3.1. Розв'язання системи різницевих рівнянь, породженої блочними матрицями відповідними дійсній сильній двовимірній проблемі моментів

Перепишемо рівність Парсеваля в термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів А і В та A^{-1} і B^{-1}. Спочатку доведемо таку лему:

Лема 3.1.1 Нехай $\gamma(x,y) = (\gamma_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n(x,y) \in H_n$, $(x,\ y) \in R^2$ – узагальнений власний вектор з (l_{fin})' оператора А з власним числом x, а також узагальнений власний вектор В з власним числом y та оператора A^{-1} з власним числом x^{-1}, а також узагальнений власний вектор B^{-1} з власним числом y^{-1}. Тоді $\gamma(x,\ y)$ – це розв'язок з (l_{fin})' чотирьох різницевих рівнянь (див. (2.26) і (2.42) та (2.59) і (2.66)):

$$(J_A\gamma(x,y))_n = a_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + b_n\gamma_n(x,y) + c_n\gamma_{n+1}(x,y) = x\gamma_n(x,y), (x,y),$$

$$(J_B\gamma(x,y))_n = u_{n-1}\gamma_{n-1}\ (x,y) + w_n\gamma_n(x,y) + v_n\gamma_{n+1}(x,y) = y\gamma_n(x,y)$$

$$(J_{A^{-1}}\gamma(x,y))_n = p_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + q_n\gamma_n(x,y) + r_n\gamma_{n+1}(x,y) = x^{-1}\gamma_n(x,y)$$

$$(J_{B^{-1}}\gamma(x,y))_n = \psi_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + \omega_n\gamma_n(x,y) + \phi_n\gamma_{n+1}(x,y) = y^{-1}\gamma_n(x,y),$$

$$n \in N_0,\ \varphi_{-1}(x, y) =: 0 \qquad (3.1)$$

з початковою умовою $\varphi_0 \in R$.

Стверджуємо, що цей розв'язок є таким: $\forall\ n \in N$

$$\varphi_n(x, y) = Q_n(x, y)\varphi_0 = (Q_{n;\,0}, Q_{n;1}, \ldots,\ Q_{n;\,4n-1},)_{\varphi_0}. \qquad (3.2)$$

Тут $Q_{n;\,\alpha}$, $\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ - поліноми від $x\ i\ y$, і ці поліноми мають вигляд:

$$Q_{n;\,\alpha}(x, y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{n-\alpha}\, y^{\alpha} + \cdots,\ \alpha\ =\ 0,\ 1,\ \ldots, (n\ -\ 1); 1);$$

$$Q_{n;\,\alpha}(x, y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{n-\alpha}\, y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha\ =\ n,\ n+1,\ \ldots, (3n\ -\ 1); \qquad (3.3)$$

$$Q_{n;\,\alpha}(x, y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\alpha-3n}\, y^{2n-\alpha} + \cdots, \alpha\ =\ 2n,\ 2n+1,\ \ldots, (3n\ -1);$$

$$Q_{n;\,\alpha}(x, y) = k_{n;\,\alpha}\, x^{\alpha-3n}\, y^{\alpha-4n} + \cdots\ ,\ \alpha\ =\ 3n,\ 3n+1,\ \ldots, (4n\ -\ 1);$$

де $k_{n;\,\alpha} > 0$ і . . . – залишок згідно (2.4).

Доведення. Для $n\ =\ 0$ система (3.1) має вигляд

$$b_0\, \gamma_{0\,0} + c_{0;\,0,\,0}\, \gamma_{1\,0} = x\, \gamma_{0\,0},$$

$$w_0\, \gamma_{0\,0} + u_{0;\,0,\,0}\, \gamma_{1\,0} + u_{0;\,0\,1}\gamma_{1\,1} = y\, \gamma_{0\,0,} \qquad (3.4)$$

$$p_0\, \gamma_{0\,0} + q_{0;\,0,\,0}\, \gamma_{1\,0} + q_{0;\,0,\,1}\gamma_{1\,1} + r_{0;\,0\,2}\, \gamma_{1\,2}\, x^{-1}\, \gamma_{0\,0,}$$

$$\psi_{0\,0}\, \gamma_{0\,0} + \omega_{0;\,0,\,0}\, \gamma_{1\,0} + \omega_{0;\,0\,1}\, \gamma_{1\,1} + \phi_{0;\,0\,2}\, \gamma_{1\,2} + \phi_{0;\,0\,3}\, \gamma_{1\,3} = y^{-1}\gamma_{0\,0}\,.$$

Система (3.4), очевидно, при заданому $\varphi_{0,0}$ однозначно розв'язується відносно невідомих $\gamma_{1,\,0}$, $\gamma_{1,\,1}$, $\gamma_{1,\,2}$ та $\gamma_{1,\,3}$.

Далі слід припустити, що $\gamma_{n-1}(x, y)$ та $\gamma_n(x, y)$ для деяких n є компонентами узагальненого власного вектора $\gamma(x, y) = (\gamma_n(x, y))_{n=0}^{\infty}$. За індукцією показуємо, що $\gamma_{n+1}(x,y)$ також має вигляд (3.3).

3.2. Відновлення міри за чотирма заданими блочними матрицями

Розглянемо $Q_n(x,y)$ з фіксованими x *і* y як лінійний оператор, який діє з H_0 в H_n, тобто, $H_0 \ni \gamma_0 \mapsto Q_n(x, y)\gamma_0 \in H_n$. Також розуміємо $Q_n(x,y)$ як операторнозначний поліном від x *і* y та x^{-1} і y^{-1}; отже, спряжений оператор має вигляд $Q_n^*(x,y) = (Q_n(x,y))^* : H_n \to H_0$. Використовуючи поліноми $Q_n(x,y)$, побудуємо таке зображення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 3.2.1 Оператор $\Phi_{j,k}(x,y)$, $\forall (x,y) \in R^2$ має такий вигляд:

$$\Phi_{j,k}(x, y) = Q_j(x, y)\,\Phi_{0,0}(x, y)\,Q_k^*(x, y) : H_k \to H_j, \quad j, k \in N_0, \tag{3.5}$$

де $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$ скаляр.

Доведення. Для фіксованого $k \in N_0$ вектор $\gamma = \gamma(x, y) = (\gamma_n(x, y))_{j=0}^{\infty}$, де

$$\gamma_j(x, y) = \Phi_{j,k}(x, y) = \pi_j\,\Phi(x, y)\,\pi_k \in H_j, \ (x, y) \in R^2, \tag{3.6}$$

є узагальненим розв'язком, в (l_{fin})' системи рівнянь

$$J_A\,\gamma(x, y) = x\,\gamma(x, y),\ J_B\,\gamma(x, y) = y\,\gamma(x, y)\,J_{A^{-1}}\,\gamma(x, y)$$

$$= x^{-1}\,\gamma(x, y),\ J_{B^{-1}}\,\gamma(x, y) = y^{-1}\,\gamma(x, y) \tag{3.7}$$

Оскільки $\Phi(x,y)$ – це проектор на узагальнені власні вектори операторів A і B та B^{-1} і A^{-1} з відповідними узагальненими власними числами x і y та

x^{-1} і y^{-1} . Отже, $\phi = \phi(x, y) \in l_2(p^{-1})$ існує, як звичайний розв'язок системи рівнянь (3.7) з початковою умовою $\varphi_0 = \pi_0 \Phi(x, y) \pi_k \in H_0$.

Використаємо лему 3.3.1 і у зв'язку з (3.2) отримуємо

$$\Phi_{j, k} (x, y) = Q_j (x, y)(\Phi_{0, k} (x, y)), \quad j \in N_0. \tag{3.8}$$

Оператор $\Phi(x,y) : l_2 (p) \to l_2 (p^{-1})$ формально самоспряжений на l_2 і є похідною розкладу одиниці оператора А на l_2 відносно спектральної міри. Отже, відповідно до (3.5) отримуємо

$$(\Phi_{j, k}(x, y))^* = (\pi_j \Phi (x, y) \pi_k)^* = \pi_k \Phi (x, y) \pi_j = \Phi_{j, k}(x, y), j, k \in N_0. \tag{3.9}$$

Для фіксованого $j \in N_0$ з (3.9) і попереднього розглянутого матеріалу, випливає, що вектор

$$\gamma = \gamma(x, y) = (\gamma_k(x, y))_{k=0}^{\infty}, \quad \gamma_k(x, y) = \Phi_{j, k}(x, y) = (\Phi_{j, k}(x, y))^*$$

це звичайний розв'язок рівнянь (3.7) з початковою умовою $\varphi_0 = \Phi_{0, j}(x, y) = (\Phi_{j, 0}(x, y))^*$.

Знову використавши лему 3.3.1, отримаємо зображення типу (3.8),

$$\Phi_{k, j}(x, y) = Q_k(x, y)(\Phi_{0, j}(x, y)), \ k \in N_0 . \tag{3.10}$$

Беручи до уваги (3.9) і (3.10), отримаємо

$$\Phi_{0, k}(x,y) = (\Phi_{k, 0}(x,y))^* = (Q_k(x,y)\Phi_{0, 0}(x,y))^* = \Phi_{0, 0}(x,y)(Q_k(x,y))^*, \ k \in N_0.$$

(тут використовуємо $\Phi_{0, 0}(x,y) \geq 0$). Підставляючи (3.11) в (3.8) отримуємо (3.5). □

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (1.24) в більш конкретній формі. Нарешті, підставимо вираз (3.5) для $\Phi_{j, k}(x,y)$ і отримаємо, що

$$(f,g)_{l_2} = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int_{R^2} (\Phi_{j,\,k}(x,y)f_k, g_j)_{l_2} d\sigma(x,\ y)$$

$$= \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int_{R^2} (Q_j\ (x,\ y)\Phi_{0,\,0}(x,y)Q_k^*(x,\ y)f_k, g_j)_{l_2} d\sigma(x,\ y) =$$

$$\sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int_{R^2} (Q_k^*(x,\ y)f_k, Q_j^*(x,\ y)g_j)_{l_2} dp(x,\ y) =$$

$$\int_{R^2} (\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(x,\ y)f_k)\overline{(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(x,\ y)g_j)}dp(x,\ y), \tag{3.12}$$

$$dp(x,\ y) = \Phi_{0,\,0}(x,\ y)dp(x,\ y),\ \ \forall f,\ g \in l_{fin}.$$

Позначимо перетворення Фур’є $\hat{}$ для комутуючих самоспряжених операторів А і В, у яких є обернені A^{-1} i B^{-1}, в просторі l_2 (2.6)

$$l_2 \supset l_{fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*\ (x,\ y) f_n \in L_2(R^2, dp(x,\ y)).$$

(3.13)

Отже, (3.12) дає рівність Парсеваля у фінальній формі,

$$(f,g)_{l_2} = \int_{R^2} \hat{f}(x,\ y)\ \overline{\hat{g}(x,\ y)}\ dp(x,\ y), \quad \forall f,\ g \in l_{fin}. \tag{3.14}$$

Продовжимо (3.14) за неперервністю $\forall f, g \in l_2$. Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,\ y)$ випливає з (3.13) і (3.14). А саме, достатньо лише взяти f = (0, . . . , 0, f_k , 0, . . .), $f_k \in H_k$, g = (0, . . . , 0, g_j , 0, . . .), $g_j \in H_j$ в (3.13) і (3.14). Тоді

$$\int_{R^2} (Q_k^*(x,\ y)f_k)\ \overline{(Q_j^*(x,\ y)g_j)}\ dp(x,\ y) = \delta_{j,\,k}(f_j, g_j)_{H_j}, \quad \forall k,\ j \in N_0.$$

(3.15)

Використаємо зображення (3.2) для цих многочленів, можемо переписати рівність (3.15) у скалярній формі. Щоб зробити це, зауважимо, що в цілому

$Q_0^*(x,\ y) = \overline{Q}_0(x,\ y)$ і для $n \in N_0$ відповідно до (3.2) $Q_n(x,y) = (Q_{n;\,0}(x,y),\ Q_{n;\,1}(x,y),\ \ldots,\ Q_{n;\,4n-1}(x,y)) : H_0 \to H_n$. Отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,\ y) : H_n \to H_0$ маємо

$$(Q_n(x,y)q,\ p)_{H_n} = ((Q_{n;\,0}(x,y)\,q_0,\ Q_{n;\,1}(x,y)\,q_1,\ \ldots,\ Q_{n;\,n}(x,y)\,q_{4n-1}\ ),$$

$$(p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_n))_{H_n} = Q_{n;0}(x,y)q_0\overline{p}_1 + \ldots + Q_{n;n}(x,y)q_{4n-1}\overline{p}_n$$

$$= \overline{q(\overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1 + \ldots + \overline{Q_{n;n}(x,y)}p_n)} = (q, Q_n^*(x,\ y)p)_{H_0},$$

де $Q_n^*(x,\ y)p = \overline{Q_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}p_1 + \ldots + \overline{Q_{n;4n-1}(x,y)}p_n,\ \forall q \in H_n$.

З останньої рівності для $n \in N$ і $f_n = (f_{n,\,0}, f_{n,\,1}, \ldots, f_{n,\,n}) \in H_n$, отримуємо

$$Q_n^*(x,\ y)f_n = \overline{Q_{n;\,0}(x,y)}\,f_{n;\,0} + \overline{Q_{n;\,1}(x,y)}\,f_{n;\,1} + \ldots + \overline{Q_{n;\,4n-1}(x,y)}\,f_{n;\,4n-1},$$

$$Q_0^*(x,\ y) = 1. \tag{3.16}$$

Тому (3.15) має вигляд

$$\forall f_{k;\,0}, f_{k;\,1}, \ldots, f_{k;\,4k-1}, g_{j;0}, g_{j;1}, \ldots, g_{j;4j-1} \in C,\ j,\ k \in N_0,$$

$$\int_{R^2} \Big(\sum_{\alpha=0}^{k} \overline{Q_{k;\,\alpha}(x,y)}\,f_{k;\,\alpha}\Big)\, \overline{\Big(\sum_{\beta=0}^{j} \overline{Q_{j;\,\beta}(x,y)}\,f_{j;\,\beta}\Big)}\ dp(x,y) = \delta_{j,\,k} \sum_{\alpha=0}^{j} f_{j;\,\alpha}\,\overline{g}_{j;\,\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна співвідношенню ортогональності у класичній формі:

$$\int_{R^2} \overline{Q_{k;\,\beta}^*(x,y)}\,Q_{j;\,\alpha}dp(x,\ y) = \delta_{j,\,k}\delta_{\alpha,\,\beta} \quad (Q_{0;\,0} = Q_0(x,y)), \tag{3.17}$$

$\forall j, k \in N_0, \forall \alpha = 0, 1, \ldots, 4j - 1, \beta = 0, 1, \ldots, 4k - 1.$

Відзначимо, що у зв’язку з (3.16) перетворення Фур’є (3.13) може бути переписано у вигляді:

$$\hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{4n-1} \overline{Q_{n;\,\alpha}(x,y)}\, f_{n;\,\alpha}, \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2.\ (x,\ y) \in R^2,$$

(3.18)

Використавши викладені результати цього розділу, можемо сформулювати таку спектральну теорему для наших обмежених, комутуючих симетричних операторів А і В, для яких існують обернені A^{-1} i B^{-1}.

Теорема 3.2.2 Розглянемо простір (2.6):

$$l_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_1 \oplus, \cdots, H_0 = \mathbb{C}, H_n = \mathbb{C}^{4n}, n \in \mathbb{N}, \qquad (3.19)$$

і лінійні оператори А і В з їхніми оберненими A^{-1} i B^{-1}, які визначаються на скінченних векторах l_{fin} блочними тридіагональними матрицями типу Якобі $J_A i\, J_B$ та $J_{A^{-1}}\, i\, J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.25) і (2.41) та (2.58) і (2.65) за допомогою виразів в (2.26) і (2.42) та (2.59) і (2.66). Вважаємо, що всі коефіцієнти $a_n, b_n, c_n, u_n, w_n, v_n$ та $p_n, q_n, r_n, \omega_n, \phi_n, \psi_n, n \in N_0$, рівномірно обмежені, деякі елементи цих матриць дорівнюють нулю або додатні відповідно до (2.25), (2.41) і (2.58), (2.65) і замикання А і В за неперервністю обмежені комутуючі оператори самосопряжені на цьому просторі. Розклад за узагальненими власними векторами операторів А і В та A^{-1} і B^{-1} відповідних блочним тридіагональним матрицям типу Якобі J_A і J_B та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$ має такий вигляд. Для заданого початкового значення $\gamma_0(x,y) = \gamma_0 \in R \setminus \{0\}$ система рівнянь

$$(J_A \gamma(x,y))_n = a_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + b_n\gamma_n(x,y) + c_n\gamma_{n+1}(x,y) = x\,\gamma_n(x,y),$$

$$(J_B\gamma(x,y))_n = u_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + w_n\gamma_n(x,y) + v_n\gamma_{n+1}(x,y) = y\,\gamma_n(x,y),$$

$$(J_{A^{-1}}\gamma(x,y))_n = p_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + r_n\gamma_n(x,y) + q_n\gamma_{n+1}(x,y) = x^{-1}\gamma_n(x,y),$$

$$(J_{B^{-1}}\gamma(x,y))_n = \psi_{n-1}\gamma_{n-1}(x,y) + \omega_n\gamma_n(x,y) + \phi_n\gamma_{n+1}(x,y) = y^{-1}\gamma_n(x,y),$$

$$n \in N_0,\ \gamma_{-1}(x,y) =: 0,\ \ a_{n-1} = u_{n-1} = p_{n-1} = \psi_{n-1} =: 0 \qquad (3.20)$$

має розв’язок $\phi(x,\ y) = (\gamma_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\gamma(x,y)$ зі значеннями в H_n, у вигляді:

$$\gamma_n(x,y) = P_n(x,y)\gamma_0 = (P_{n;\,0},\ P_{n;\,1}, \ldots,\ P_{n;\,4n-1},)\,\gamma_0,$$

який є узагальненим власним вектором пари операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} згідно проекційної спектральної теореми [3, 8, 10]. $P_{n;\,\gamma}(x,y), \gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n-1$ – поліноми від x і y та x^{-1} та y^{-1}. З розкладу за узагальненими власними векторами для операторів A і B та A^{-1} і B^{-1} отримуємо перетворення Фур’є у вигляді

$$l_2 \supset l_{fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x,\ y) f_n = P_{0,\,0}(x,\ y) f_{0;\,0} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{4n-1} \overline{P_{n;\,\gamma}(x,\ y)}\, f_{n;\,\gamma} \in\ L_2(R^2, dp(x,\ y)) =: L_2, \qquad (3.21)$$

де $P_n^*(x,\ y) : H_n \to H_0$ – оператор спряжений до

$P_n(x,y) : H_0 \to H_n,\ dp(x,\ y)$ – відповідна спектральна міра A і B A^{-1} і B^{-1}.

Рівність Парсеваля має вигляд: $\forall f, g \in l_{fin}$

$$(f,g)_{l_2} = \int_{R^2} \hat{f}(x,\ y)\,\overline{\hat{g}(x,\ y)}\,dp(x,\ y),\ \ (J_A f,g)_{l_2} = \int_{R^2} \hat{f}(x,\ y)\,\overline{\hat{g}(x,\ y)}\,dp(x,\ y),$$

$$(J_B f, g)_{l_2} = \int\limits_{R^2} \hat{f}(x,\ y)\,\overline{\hat{g}(x,\ y)}\,dp(x,\ y), \tag{3.22}$$

$$(J_{A^{-1}} f, g)_{l_2} = \int\limits_{R^2} x^{-1}\hat{f}(x,y)\,\overline{\hat{g}(x,\ y)}\,dp(x,\ y),$$

$$(J_{B^{-1}} f, g)_{l_2} = \int\limits_{R^2} y^{-1}\hat{f}(x,y)\,\overline{\hat{g}(x,\ y)}\,dp(x,\ y)\,.$$

Перетворення (3.21) і тотожність (3.22) розширюються за неперервністю на $\forall f, g \in l_2$ так, що оператор (3.21) є унітарним і відображає весь l_2 у весь $L_2\,(R^2,\ dp(x,\ y))$.

Поліноми $P_{n;\,\gamma}\,(x,\ y)$, $n \in N$, $\gamma = 0, \ldots, 4n - 1$ і $P_{0,\,0} = 1$ утворюють ортонормовану систему в L_2 у сенсі:

$$\iint_{R^2} \sum_{i=1}^{j} \overline{P_{j;\,i}\,(x,\ y)}\,f_{j;\,i} \sum_{i=l}^{k} P_{n;\,\gamma}\,(x,\ y)\,\overline{f_{k;\,l}} = \delta_{j,\,k}\,(f_j, g_k)_{H_n}\,.$$

де $\forall f_j \in H_j$, $\forall g_k \in H_k$, $j,\ k \in N_0$.

Матриці

$$J_A = (\tau_{j,\,k})_{j,\,k=0,}^{\infty}\ \tau_{j,\,k} = (\tau_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta=0,}^{4j-1,\,4j+3},$$

$$J_B = (\theta_{j,\,k})_{j,\,k=0,}^{\infty}\ \theta_{j,\,k} = (\theta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta=0,}^{4j-1,\,4j+3},$$

$$J_{A^{-1}} = (\eta_{j,\,k})_{j,\,k=0,}^{\infty}\ \eta_{j,\,k} = (\eta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta=0,}^{4j-1,\,4j+3},$$

$$J_{B^{-1}} = (\vartheta_{j,\,k})_{j,\,k=0,}^{\infty}\ \vartheta_{j,\,k} = (\vartheta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta=0,}^{4j-1,\,4j+3},$$

відновлюються за формулами:

$$\tau_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (J_A\delta_{k,\,\beta},\ \delta_{j,\,\alpha})_{l_2} = \iint_{R^2} x\,\overline{P_{k,\,\beta}\,(x,\ y)}\,P_{j;\,\alpha}(x,\ y)\,dp(x,\ y),$$

$$\theta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (J_B\delta_{k,\,\beta},\ \delta_{j,\,\alpha})_{l_2} = \iint_{R^2} y\,\overline{P_{k,\,\beta}\,(x,\ y)}\,P_{j;\,\alpha}(x,\ y)\,dp(x,\ y),$$

$$\eta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (J_A\delta_{k,\,\beta},\ \delta_{j,\,\alpha})_{l_2} = \iint_{R^2} x^{-1}\,\overline{P_{k,\,\beta}\,(x,\ y)}\,P_{j;\,\alpha}(x,\ y)\,dp(x,\ y),$$

$$\vartheta_{j,\,k;\,\alpha,\,\beta} = (J_B\delta_{k,\,\beta},\ \delta_{j,\,\alpha})_{l_2} = \iint_{R^2} y^{-1}\,\overline{P_{k,\,\beta}\,(x,\ y)}\,P_{j;\,\alpha}(x,\ y)\,dp(x,\ y),$$

$$j,\ k \in N_0,\quad \alpha,\ \beta\ =\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n\ -\ 1$$

Тут перепозначено

$$b_j = \tau_{j,j},\ w_j = \theta_{j,\,j},\ \tau_j = \eta_{j,j},\ \omega_j = \vartheta_{j,j},\ c_j = \tau_{j,j+1},\ u_j = \theta_{j,j+1},\ q_j = \eta_{j,j+1},$$

$$\varphi_j = \vartheta_{j,j+1},\ a_j = \tau_{j,j},\ v_j = \theta_{j,j+1},\ p_j = \eta_{j+1,j},\ \psi_j = \vartheta_{j,j+1},\quad j \in N_0 \quad (3.24)$$

Доведення. Необхідно тільки показати, що поліноми $\overline{Q_{n;\,\alpha}\,(x,y)}$, $n \in N$, $\alpha\ =\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 4n\ -\ 1$ і $Q_{0;\,0}(x,y) = 1$ ортогональні і утворюють тотальну множину в просторі $L_2(R^2, dp(x,\ y))$. Для цього спочатку зауважимо, що через компактність носія міри dρ(x, y) на R^2, елементи $x^j\,y^k,\ j,\ k \in Z,$ утворюють тотальну множину в $L_2(R^2, dp(x,\ y))$.

Припустимо протилежне, тобто, що наша система поліномів не є тотальною. Тоді існує ненульова функція $h(x,\ y) \in$ $L_2(R^2, dp(x,\ y))$ що є ортогональною до всіх цих поліномів і, отже, відповідно до (3.3) для всіх $x^j\,y^k,\ j,\ k \in Z.$ Отже $h(x,\ y)\ = 0.$ □

Остання теорема розв‘язує пряму спектральну задачу для обмежених симетричних комутуючих операторів A і B, які мають обернені A^{-1} і B^{-1}, та зображаються в просторі l_2 матрицями $J_A\ i\ J_B$ та $J_{A^{-1}}\ i\ J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.25) і (2.41) та (2.58) і (2.65).

Обернена задача полягає у побудові за заданою мірою $dp(x,\ y)$ на R^2 з компактним носієм обмежених симетричних комутуючих матриць

J_A i J_B та їх обернених $J_{A^{-1}}$ i $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.25) і (2.41) та (2.58) і (2.65), які мають свою спектральну міру, що і дорівнює dρ(x, y). Ця побудова ведеться відповідно до теорем 2.3.5, 2.3.10, 2.3.15 та 2.3.18 з використанням ортогоналізації Шмідта для системи (2.2). Для матриць J_A i J_B та $J_{A^{-1}}$ i $J_{B^{-1}}$ у вигляді (2.25) і (2.41) та (2.58) і (2.65), які побудовані за заданою $dp(x, y)$, спектральна міра відповідних обмежених симетричних, комутуючих операторів A і B співпадає з початковою мірою.

Теорема 3.2.3: Якщо в теоремах 1 - 4 покласти $c_{n;\,0,\,0} = c_{n;\,1,\,1} = \ldots = c_{n;\,n,\,n} = c_{n;\,n+1,\,n} = \ldots = \; = c_{n;\,3n-1,\,1} = c_{n;\,3n-1,\,3n+3} = c_{n;\,3n,\,3n+4} = \ldots = c_{n;\,4n,\,4n+2} = c_{n;\,4n-1,\,4n+3} = r_{n,\,0,\,3n-1} = r_{n,\,0,\,3n-1} = r_{n,\,1,\,3n-1} = \ldots = r_{n,\,n-1,\,3n-1} = r_{n,\,n,\,4n-1} = \ldots = r_{n,\,3n-1,\,0} = r_{n,\,3n,\,n} = \ldots = r_{n,\,4n-1,\,n} =$
$= q_{n;\,n,\,0} = q_{n;\,n,\,1} = \ldots = q_{n;\,n,\,n+2} = q_{n;\,n+1,\,n+3} = \ldots = q_{n;\,3n,\,3n+2} = \ldots = q_{n;\,4n-1,\,3n+2} = u_{n,\,0,\,0} = u_{n,\,0,\,1} = u_{n,\,1,\,2} = \ldots = u_{n,\,2n-1,\,2n} = \ldots = u_{n,\,2n-1,\,2n+1} = \ldots = u_{n,\,4n-1,\,2n+1} = 1$, та крайні елементи матриці $J_{y^{-1}}$ також = 1, а " * " - замінено нулями, то тоді отримаємо сім'ю комутуючих (на фінітних векторах) матриць $J_x\,J_{x^{-1}}\,J_y\,J_{y^{-1}}$, при цьому міра розпадається у добуток мір $d\rho(x, y) = d\rho_1(x)\, d\rho_2(y)$.

Доведення:

$$c_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & \ldots & 1 & 0 \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & \ldots & * & 1 \end{bmatrix}}_{4n+4} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} 4n \qquad r_n = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & 0 & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \ldots & 0 & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & 0 & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & * & \ldots & * & * & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & * & \ldots & 0 & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & * & * & \ldots & * \end{bmatrix}}_{4n} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} 4n$$

$$
q_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
* & * & \cdots & * & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & \ldots & * & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & \ldots & * & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix}\right\} 4n}_{4n}
\qquad
u_n = \underbrace{\left.\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
* & * & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & 1 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
* & * & * & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix}\right\} 4n}_{4n+4}
$$

Було перевірено комутативність матриць.

Висновки. Досліджені матриці відповідні сильній двовимірній дійсній проблемі моментів із мінімальним набором ненульових елементів, які всі рівні одиниці. При цьому встановлено, що міра розпадається в добуток мір за незалежними змінними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Н.И. Ахиезер. – М.:Гос. физ.-мат. лит., 1961. – 312 с.
2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер. – М.: Физматгиз., 1961. – 310 с.
3. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка / Ю.М. Березанский. – Тр. Моск. М. Об-ва, 1956. – 5. – С. 203-268.
4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжен- ных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
5. Березанский Ю.М. Прямая и обратная спектральные задачи для якобиева поля / Ю.М. Березанский.// Алгебра и анализ. – 1997. – 9, No 6. – С. 38–61.
6. Березанский Ю.М. Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами / Ю.М. Березанский. // Функ. анализ и прилож. – 2003. – 37, No 4. – С. 86–91.
7. Березанский Ю.М. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений / Ю.М. Березанский, М.И. Гехтман, М.Е. Шмойш // Киев: Укр. мат. журнал. 1986. – 38, No 1. – С. 84-89.
8. Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. – Киев: Наук. думка, 1988. – 800 с.
9. Березанский Ю.М. Интегрирование некоторых дифференциально - разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных

якобиевых нормальных матриц / Ю. М. Березанский, А.А. Мохонько // Функ. анализ и прилож. – 2008. – 42, No 1. – С. 1–21.

10. Березанский Ю.М. Функциональный анализ: Курс лекций. / Ю.М. Березанский , Г.Ф.Ус, З.Г. Шефтель. – Київ: Вища шк., 1990. – 600 с.

11. Гехтман М. И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных,/М. И. Гехтман, А. А. Калюжный // Укр. мат. журнал, Ин-т математики АН УССР, Киев. – 1991 – 43, No 10. – С. 1437–1440.

12. Дудкін М. Є. Пряма задача для блочних матриць типу Якобі відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів/ М. Є. Дудкін, В. І. Козак //Наукові Вісті НТУУ “КПІ”. – 2014. – No 4. – С. 41-47.

13. Дудкін М. Є. Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / Дудкін М. Є., Козак В. І. // Наукові Вісті НТУУ “КПІ”. – 2015. – No4, – С. 41–46.

14. Дудкін М. Є., Козак В. І. Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля // Український математичний журнал. –2016. – 21, No 68. –Р. 495–505.

15. Дудкін М. Є. Умови єдиності міри відповідної двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін,В. І. Козак // Наукові Вісті НТУУ КПІ. 2016. – 12, No 4. – С. 32–37.

16. Дудкін М. Є. Пряма спектральна задача з блочними матрицями типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній проблемі моментів / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА Фізико - математичні науки. 2016. – 178, С. 16–22.

17. Ескин Г. И. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов / Г. И. Ескин // ДАН СССР. – 1960. – 133, No 3. – С. 540–543.

18. Зархина Р. Б. О двумерной проблеме моментов / Р. Б. Зархина // ДАН СССР. – 1959. – 124, No4. – С. 743–746.

19. Козак В.І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів / В.І. Козак // Наукові Вісті НТУУ “КПІ”. – 2013.– 170, No4. – С. 73–76.

20. Козак В. І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів/ В. І. Козак // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – С. 117-118.

21. Дудкін М. Є. Direct spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem/ Дудкін М. Є., V. I. Kozak: Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – С. 13.

22. Козак В. І. Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних строгій двовимірній дійсній проблемі моментів // Наукові записки НаУКМА. – 2015. – 21, No 165. –Р. 19–25.

23. Козак В. І. Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики” (Київ, 23–25, квітень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ” , 2015. – С. 19.

24. Козак В. І. Аналог функції Вейля відповідної двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. “Міжнародна конференція молодих математиків” (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – С. 76.

25. Козак В. І. Нескінченна двовимірна система зв’язних тягарців / В. І. Козак // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”

(Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка , 2016. – С. 103.

26. Козак В. І. Умова єдиності міри відповідної блочним матрицям типу Якобі у двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Тези доповідей. Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі” присвячена пам’яті професора С.С.Левіщенка (Київ, 7-8 жовтня 2016) – Київ: Нац. пед. ун-т ім. М.Драгоманова, 2016. – С. 48.

27. Козак В. І. Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2017. – No 2. – С. 41-48.

28. Костюченко А. Г. Многомерная проблема моментов / А. Г. Костюченко // ДАН СССР. – 1960. – 131, No6. – С. 1249–1252.

29. Крейн М. Г. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов / М. Г. Крейн // ДАН СССР. – 1949. – 69, No 2. – С. 125-128.

30. Крейн М.Г. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) / М.Г.Крейн // Укр. мат. журн. – 1949. – No 2. – С. 3-66.

31. Сеге Г. Ортогональные полиномы / Г. Сеге. – М: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. – 500 с.

32. Симонов К. К. Ортогональные матричные полиномы Лорана / К. К. Симонов // Мат. заметки. – 2006. – 79, No 2. – С. 316–320

33. Симонов К. К. Ортогональные матричные полиномы Лорана на веще- ственной оси / К. К. Симонов // Украинский Математический Вестник. – 2006. – 3, No 2. – С. 275-299.

34. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным / П.К. Суетин, – М:Наука Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. – 384 с.

35. Berezansky Yu. M. Spectral theory of commutative Jacobi fields: direct and inverse problems / Yu. M. Berezansky // Fields Inst. Communic. – 2000. – 25. – P. 211–224.

36. Berezansky Yu. M. Some generalizations of the classical moment problem / Yu. M. Berezansky // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2002. – 44. – P. 255–289.

37. Berezansky Yu. M. The complex moment problem in the exponential form / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2004. – 10, No4. – P. 1–10.

38. Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – 12, No1. – P. 1–32.

39. Berezansky Yu. M. The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – 11, No4. – P. 327–345.

40. Berezansky Yu. M. On the complex moment problem / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Math. Nachr. – 2007. – No1-2. – P. 60-73.

41. Berezansky Yu. M. The investigation of generalized moment problem associated with correlation measures / Yu. M. Berezansky, D. A. Mierzejewski // Methods Funct. Anal. Topology. – 2007. – 13, No 2. – P. 124–151.

42. Bisgaard T. M. On note on factoring of positive definite functions on semigroups / T. M. Bisgaard // Math. Nachr. – 2002. – 236. – P. 31–46.

43. Cantero M. J. Five-diagonal matrices and zeros of ortogonal polynomials on the unit circle / M. J. Cantero, L. Moral, L. Velazquez // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – 362. – P. 29–56.

44. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques / T. Carleman. – Gauthier-Villars, Paris, 1926. – 113 p.

45. Derevyagin M. S. Spectral problems for generalized Jacobi matrices / M. S. Derevyagin, V. A. Derkach // Linear Algebra Appl. – 2004. – 384. – P. 1–24.

46. Devinatz A. Integral representations of positive definite functions, II / A. Devinatz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – 77. – P. 455–480.

47. Devinatz A. Two parameter moment problems / A. Devinatz // Duke Math. J. – 1957. – 24. – P. 481–498.

48. Dudkin M. E. Singularly perturbed rank one normal operators and its applications / M. E. Dudkin // Institute of Mathematics NAS of Ukraine. – 2008. – 3. – P.

49. Dudkin M.E. The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices / M.E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – 14, No 2. – P. 168–176.

50. Dudkin M.E. The complex moment problem in the exponential form with direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type correspondence matrices / M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2012. – 18, No 21. – P. 111–139.

51. Dudkin M.E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – 21, No 3. – P. 219–251.

52. Fuglede B. The multidimensional moment problem / B. Fuglede // Expo. Math. – 1983. – No 1. – P. 47–65.

53. Geronimus Ya. L. Theory of Orthogonal Polynomials / Ya. L. Geronimus // Gostekhizdat., Moscow-Leningrad. – 1950. – P.

54. Gorbachuk M. L. M. G. Krein's Lectures on entire operators / M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk. – Birkh ¨auser Verlag, Oper. Theorey Adv. Appl., Boston, 1997. – 221 p.

55. Haviland E. K., On the moment problem for distribution functions in more than one dimension / E. K. Haviland // Amer. J. Math. – 1995. – 57. – P. 562–572.

56. Haviland E. K. On the moment problem for distribution functions in more than one dimension II / E. K. Haviland // Amer. J. Math. – 1996. – 58. – P. 164–168.

57. Krein M. G. On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products / M. G. Krein // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1946. – 53, No 1. – P. 3–6.

58. Krein M. G. On Hermitian operators with directing functionals / M. G. Krein // Zbirnyk prac' Inst. Mat. AN USSR. – 1948. – No 10. – P. 83–106.

59. Mandelbrojt S. S ´eries Adh ´erentes. R ´egularisation des Suites. Applications / S. Mandelbrojt. – Gauthier-Villars, Paris, 1952. – 277 p.

60. Nelson E. Analytic vectors / E.Nelson // Ann. Math. – 1959. – 70. – P. 572– 614.

61. Nussbaum A.E. Quasianalytic vectors / A.E.Nussbaum // Ark. Math. – 1965. – 6, No 10. – P. 179–191.

62. Nussbaum A.E. A note on quasanalytic vectors / A.E.Nussbaum // Studia Math. – 1969. – 33. – P. 305–309.

63. Petersen L. C. On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem / L. C. Petersen // Math. Scand. – 1982. – 51. – P. 361–366.

64. Pulemyotov A.D. Support of a joint resolution of identity and the projection spectral theorem, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. / A.D.Pulemyotov // – 2003. – 6, No 4. – P. 549–561.

65. Reed M. Method of Modern Mathematical Physics: Functional analisys / M. Reed, B. Simon. – Academic Press, New York, 1975. – 1. – 400 p.

66. K. Schmu ¨dgen An example of a positive polynomial, which is not a sum of squares polynomials. A positive but not positive functional / K. Schmu ¨dgen // Math. Nachr. – 1979. – 88. – P. 385–390.

67. K. Schmu ¨dgen On commuting unbounded self-adjoint operators, IV / K. Schmu ¨dgen // Math. Nachr. – 1986. – 125. – P. 83–102.

68. Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite differential operator / B. Simon // Advances Math. – 1998. – 137. – P. 82–203.

69. Simon B. Orthogonal polynomials on the unite circle Part 1: Classical theory / B. Simon. – Amer. Math. Soc. Providence, 2005. – 54. – 455 p.

70. Simon B. Orthogonal polynomials on the unite circle Part 2: Spectral Theory / B. Simon. – Amer. Math. Soc. Providence, 2004. – 54. – 1031 p.

71. Simonov K. K. Strong matrix moment problem of Hamburger / K. K. Simonov // Methods Funct. Anal. Topology. – 2006. – 12, No 2. – P. 183–196.

72. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices / G. Teschl. – AMS Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. Providence, 2000. – 72. – 165 p.

73. Xu Y. On Ortogonal Polinomials in Several Variables / Y. Xu // American Math. Society. – 1997. – 14. – P. 247–270.

74. Xu Y. Block jacobi matrices and zeros of multivariate ortogonal polynomials / Y. Xu // American mathematical society. – 1994. – 342, No2 – P. 855–866.